UNIWERSYTET WARMIŃSKO-MAZURSKI W OLSZTYNIE

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI

mgr Krzysztof Żyjewski

STRESZCZENIE ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

Nielokalne zagadnienie Robina dla równań eliptycznych drugiego rzędu w obszarze płaskim z punktem kątowym na brzegu

Promotor rozprawy:
prof. dr hab. Michaił Borsuk

Olsztyn, maj 2012

1 Cel pracy

1. Badanie zachowania się słabych rozwiązań nielokalnych zagadnień Robina dla liniowych i quasiliniowych eliptycznych równań drugiego rzędu w pobliżu punktu kątowego na brzegu przy minimalnej gładkości współczynników.

2. Badanie nielokalnych zagadnień na wartości własne. Wyprowadzenie nierówności typu Friedrichsa - Wirtingera z dokładną stałą szacującą.

3. Wyprowadzenie całkowych i punktowych oszacowań słabych rozwiązań nielokalnych zagadnień Robina dla liniowych i quasiliniowych eliptycznych równań drugiego rzędu w pobliżu punktu kątowego na brzegu.

4. Potwierdzenie dokładności uzyskanych wyników odpowiednimi przykładami.

2 Aktualność podjętej tematyki

Obecnie zbudowana jest kompletna teoria dla równań liniowych eliptycznych i parabolicznych w obszarach o gładkich brzegach, mianowicie teoria istnienia, jednoznaczności i regularności rozwiązań. Jednym z jej głównych wyników jest to, że jeżeli współczynniki równania, operatory brzegowe, ich prawe strony, a także brzegi obszarów są wystarczająco gładkie, to rozwiązanie zagadnienia jest funkcją gładką. Innymi podstawowymi wynikami tej teorii są oszacowania a priori rozwiązań w różnych przestrzeniach funkcyjnych i właściwości Fredholma dla operatora odpowiadającego zagadnieniom brzegowym.

Jednakże, wiele zagadnień fizyki i techniki sprowadza się do konieczności badania zagadnień brzegowych w obszarach o niegładkim brzegu. Do takich obszarów, w szczególności odnoszą się te, które mają skończoną liczbę punktów kątowych ($n = 2$) lub stożkowych ($n > 2$) bądź też krawędzi na brzegu.

Równolegle z ogólną teorią eliptycznych zagadnień brzegowych w obszarach gładkich, zagadnienia takie były rozważane dla obszarów z osobliwościami na brzegu. Zakres wiedzy dla eliptycznych zagadnień brzegowych w niegładkich obszarach szczegółowo opisany jest w pracy W.A Kondratiewa i O.A. Oleinika [32]. Naruszenie warunku gładkości brzegu w tych zagadnieniach prowadzi do rozwiązań z osobliwościami w sąsiedztwie nieregularnych punktów brzegowych. Dlatego też metody badań stosowane dla eliptycznych zagadnień w obszarach gładkich nie mogą być tutaj użyte. Z jednej strony, metody, które zostały opracowane dla gładkich obszarów nie mogą być bezpośrednio stosowane dla obszarów z osobliwościami. Z drugiej strony, wiele wyników mających miejsce dla obszarów gładkich nie jest prawdziwych jeśli brzeg obszaru zawiera osobliwości (nie jest możliwe wyprostowanie brzegu poprzez gładkie transformacje). Tak więc w przypadku niegładkich obszarów wyniki nie mogą być podobne do rezultatów otrzymanych w obszarach gładkich. Wobec tego badanie eliptycznych zagadnień brzegowych w obszarach z osobliwościami wymaga nowej teorii.

Dla prawidłowego sformułowania zagadnienia w obszarze o niegładkim brzegu konieczny jest odpowiedni wybór prawej strony równania, warunków brzegowych oraz przestrzeni funkcyjnych, które pozwolą go rozwiązać. W wielu z tych problemów, aby zbadać zachowanie się rozwiązań w pobliżu osobliwości na brzegu wykorzystuje się specjalne przestrzenie funkcyjne mające pochodne całkowalne z pewną potęgową wagą (przestrzenie Kondratiewa). Takie przestrzenie poprawnie opisują osobliwości rozwiązania i jego pochodnych w pobliżu nieregularnych punktów brzegowych: rozwiązanie jest gładkie wszędzie za wyjątkiem punktów kątowych (stożkowych, krawędzi), a gdy zbliża się do granicy osobliwości ma, ogólnie rzecz biorąc, osobliwości typu wykładniczego.

We współczesnych badaniach teorii równań różniczkowych cząstkowych koncepcja funkcji uogólnionych jest szeroko stosowana. Najpierw rozważa się istnienie uogólnionych rozwiązań w bardzo słabym sensie, a następnie wyprowadza się regularność otrzymanego rozwiązania. W ten sposób słabe rozwiązanie jest też rozwiązaniem w silnym sensie.

Dla istnienia i jednoznaczności rozwiązań tych zagadnień istotne są różne własności rozwiązań (teoria jakościowa) włącznie z regularnością, osobliwością oraz asymptotycznym zachowaniem się rozwiązań itd. Wśród tych własności regularność i osobliwość rozwiązań często odgrywa ważną rolę.

Na przykład, w naukach o materiałach konstrukcyjnych osobliwość odpowiada szczelinie w materiale, a w reakcjach chemicznych wybuchowi. Regularność rozwiązania informuje nas natomiast o ciągłości bądź też gładkości rozwiązania. Jeśli rozwiązanie jest ciągłe, to można użyć wartości rozwiązania w danym punkcie i przedłużyć jego wartość na otoczenie tego punktu. Pomaga nam to w ilościowym zrozumieniu rozwiązania, jak również w numerycznym jego obliczaniu. Dalsze badania wykazały również, że regularność rozwiązań powiązana jest ściśle z ich istnieniem i jednoznacznością. Kiedy różne metody analizy funkcjonalnej są stosowane w badaniach równań różniczkowych cząstkowych zazwyczaj można wybrać przestrzeń funkcyjną od której oczekuje się, że rozwiązania do niej należą. Taka przestrzeń automatycznie implikuje rodzaj regularności rozwiązań. Poza tym, regularność rozwiązań jest często wyrażona przez pewne oszacowania, które również są pomocne w dowodzie istnienia i jednoznaczności rozwiązania.

Jednym z pierwszych badań dla ogólnych liniowych zagadnień brzegowych w obszarach z punktem kątowym lub stożkowym na brzegu była praca T. Carlemana [21]. Inne pionierskie badania w tym kierunku to prace Ya. Lopatinskiego [33], W. Kondratiewa [30, 31], jak również artykuły M. Birmana i G. Skworcowa [3], G. Eskina [24, 25], W. Mazji [34] - [35].

Ogólne liniowe eliptyczne zagadnienia brzegowe dla obszarów z punktem kątowym lub stożkowym studiował W. Kondratiew [31]. Badał on rozwiązywalność i regularność w przestrzeniach wagowych Sobolewa (przestrzeniach Kondratiewa) przy założeniach *dostatecznej gładkości* zarówno rozmaitości $\partial G \setminus \mathcal{O}$ jak też współczynników zagadnienia. Następnie G.M. Wierzhbinskij i W.G. Mazja [46, 47] rozważali zagadnienie Dirichleta dla równań eliptycznych drugiego rzędu i uzyskali dokładne oszacowanie rozwiązań w pobliżu osobliwości na brzegu pod warunkiem, że współczynniki równania są ciągłe względem Höldera. Później M.W. Borsuk [19, 14] (patrz również [5, 8, 9, 12, 17, 18]) badał zachowanie i gładkość rozwiązań zagadnień Dirichleta i Robina dla równań eliptycznych drugiego rzędu w postaci zarówno dywergencyjnej jak i niedywergencyjnej w pobliżu punktu stożkowego na brzegu. Poprawił on rezultat Mazji-Wierzhbinskiego wymagając, aby starsze współczynniki były ciągłe względem Diniego w punkcie stożkowym $\mathcal{O}$, podczas gdy młodsze współczynniki mogą rosnąć (wskazał dokładny rząd wykładnika wzrostu).

Quasiliniowe zagadnienia brzegowe dla obszarów z punktami osobliwymi na brzegu po raz pierwszy zostały poruszone przez P. Tolksdorfa [40] - [44], E. Miersemanna, M. Dobrowolskiego [22, 23] i P. Grisvarda [28]. Badali oni zachowanie słabych rozwiązań dla zagadnień quasiliniowych o szczególnej dywergencyjnej postaci równania w pobliżu kątowych lub stożkowych punktów brzegowych. Natomiast M.W. Borsuk [6] (patrz także [4, 7, 10, 11, 13, 14, 16, 19]) był pierwszym, który badał rozwiązywalność i regularność rozwiązań zagadnień Dirichleta dla eliptycznych quasiliniowych równań drugiego rzędu w postaci niedywergencyjnejw w obszarach z punktem stożkowym. Otrzymał on lokalne (w pobliżu punktu stożkowego) oszacowanie Höldera pierwszych pochodnych rozwiązań z dokładnym wykładnikiem, który jest centralną częścią w dowodach rozwiązywalności takich problemów.

Historia badań nielokalnych zagadnień brzegowych sięga początku XX wieku. Umotywowane są one z jednej strony teoretycznym rozwojem, a z drugiej strony ważnymi zastosowaniami pojawiającymi się między innymi w teorii plazmy [2], w teorii wielowymiarowych procesów dyfuzji [26, 27, 38, 45], czy też w stochastycznej teorii sterowania [1].

W teorii nielokalnych zagadnień pojawiają się dodatkowe trudności, ponieważ naruszenie gładkości rozwiązania występuje nie tylko na wskutek niegładkich obszarów, ale również związane jest z obecnością nielokalnych składników w warunkach brzegowych.

W wypadku równań eliptycznych liniowych drugiego rzędu w gładkich obszarach takie zagadnienia są dobrze zbadane. Jedną z pierwszych badań w tym zakresie była praca T. Karlemana z 1932 r. [20]. Następnie A. Bicadze i A. Samarski [2] zbadali nielokalne zagadnienie Dirichleta dla równania Laplace'a, w którym wartości niewiadomej funkcji na kawałku brzegu powiązane były z wartościami tej funkcji na pewnej rozmaitości leżącej wewnątrz obszaru. W tych pierwszych pracach nośnik nielokalnych składników ma pusty przekrój z brzegiem obszaru. Fakt ten sprawiał, że rozpatrywane przez nich zagadnienia można było przekształcić do równania całkowego Fredholma drugiego rodzaju i zastosować teorię tych równań w dowodzie jednoznacznej rozwiązywalności postawionych zagadnień. W tym wypadku dodawanie nielokalnych składników nie zmienia podstawowych własności zagadnień eliptycznych: zachodzi gładkość rozwiązań, własność Fredholma odpowiedniego operatora, stabilność indeksu w stosunku do dowolnych zaburzeń nielokalnych, dyskretność widma operatora.

W ogólnym przypadku nielokalne zagadnienia eliptyczne okazują się bardziej skomplikowane. Tylko ostatnie osiągnięcia w teorii równań różniczkowych cząstkowych umożliwiły badania szerokiej klasy nielokalnych brzegowych zagadnień eliptycznych. W latach 1982-2010 A. Skubaczewskij [39] rozwinął ogólną teorię takich zagadnień. Największe trudności podczas badania nielokalnych zagadnień eliptycznych takiego typu pojawiają się w wypadkach niepustego przekroju nośnika nielokalnych danych z brzegiem obszaru. Powoduje to pojawienie się osobliwości potęgowych dla rozwiązań w pobliżu tego przekroju. Dlatego też naturalnym jest rozważanie nielokalnych zagadnień eliptycznych w przestrzeniach wagowych Sobolewa. A. Skubaczewskij razem ze swoimi uczniami udowodnił rozwiązywalność nielokalnych eliptycznych zagadnień brzegowych i otrzymał oszacowania a priori rozwiązań w wagowych i niewagowych przestrzeniach Sobolewa. Wszystkie ich rezultaty zostały otrzymane dla równań z *nieskończenie różniczkowalnymi* współczynnikami. A. Skubaczewskij [39] i P. Gurewicz [29] zajmowali się również nielokalnym zagadnieniem eliptycznym o *stałych* współczynnikach w kącie płaskim. Otrzymali oni warunki wystarczające dla istnienia i jednoznaczności *silnych* rozwiązań w wagowych przestrzeniach Kondratiewa oraz wyprowadzili asymptotyczne formuły tych rozwiązań.

3 Oryginalność naukowa i nowatorstwo

W pracy otrzymano następujące nowe rezultaty:

- wyprowadzono nową całkowo - różniczkowalną nierówność typu Poincaré'ego-Frie-drichsa-Wirtingera dostosowaną do nielokalnych zagadnień eliptycznych;
- zbadano regularność słabych rozwiązań nielokalnego liniowego zagadnienia Robina dla eliptycznych dywergencyjnych równań drugiego rzędu w pobliżu punktu kątowego na brzegu przy minimalnych warunkach na gładkość współczynników;
- odnaleziono wykładnik potęgi prędkości malenia słabych rozwiązań nielokalnego zagadnienia Robina dla liniowych eliptycznych dywergencyjnych równań drugiego rzędu w pobliżu punktu kątowego na brzegu;
- zbadano regularność słabych rozwiązań nielokalnego zagadnienia Robina dla eliptycznych quasiliniowych dywergencyjnych równań drugiego rzędu w pobliżu punktu kątowego na brzegu przy minimalnych warunkach na gładkość współczynników;
- odnaleziono wykładnik potęgi prędkości malenia słabych rozwiązań nielokalnego zagadnienia Robina dla eliptycznych quasiliniowych dywergencyjnych równań drugiego rzędu w pobliżu punktu kątowego na brzegu;
- przedstawiono przykłady ilustrujące istotność założeń i prawdziwość otrzymanych wyników.

4 Metodyka badań

Wyprowadzenie oszacowań koniecznych dla gładkości rozwiązań oparto na metodach:

- De Giorgi i Stampacchia przy oszacowaniu modułu słabych rozwiązań badanych zagadnień;
- pierścieni Kondratiewa;
- iteracyjnej metodzie Mosera dla lokalnych własności słabych rozwiązań;

- całkowo - różniczkowalnych nierówności (Hardy'ego, Friedrichsa - Wirtingera, rozwiązania zagadnienie Cauchy'ego dla różniczkowalnych nierówności);
- techniki barierowej;
- zasady maksimum;
- zasady porównawczej.

5 Teoretyczna i praktyczna wartość pracy

Praca ma charakter teoretyczny. Uzyskane rezultaty poszerzą wiedzę z teorii zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych cząstkowych i będą stanowić istotny postęp w rozwinięciu tej teorii. Będą one mogły znaleźć praktyczne zastosowanie w różnych dziedzinach fizyki i techniki, np. w teorii turbulencji, teorii wielowymiarowych procesów dyfuzji, technologii lotniczej, teorii konstrukcji rakiet, stochastycznej teorii sterowania oraz teorii plazmy i innych. Metody i wyniki pracy mogą być wykorzystane przy badaniu zachowania się rozwiązań mieszanego zagadnienia brzegowego w obszarze z punktem kątowym jak również i nielokalnego zagadnienia brzegowego w obszarze z krawędzią na brzegu.

6 Najważniejsze wyniki i struktura pracy

W pracy rozważony został najtrudniejszy rodzaj zagadnień nielokalnych tj. przypadek, w którym nośnik nielokalnego składnika przecina brzeg obszaru.

Praca składa się z siedmiu rozdziałów. W **rozdziale pierwszym** zaprezentowana jest krótką historia podjętej tematyki oraz opisane zostają badane zagadnienia.

W **rozdziale drugim** wprowadzamy stosowaną notacje. Przedstawię teraz niezbędne oznaczenia użyte w streszczeniu:

- $x = (x_1, x_2)$ – element w $\mathbb{R}^2$;
- $\mathcal{O} = (0, 0)$;
- (r, ω) – współrzędne biegunowe w $\mathbb{R}^2$ o biegunie w punkcie $\mathcal{O}$ określone następująco:

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\omega_1, \\ x_2 &= r\sin\omega_1, \end{aligned}$$

gdzie $r = |x|$;

- S – okrąg jednostkowa w $\mathbb{R}^2$ o środku w punkcie $\mathcal{O}$;
- $\Sigma_0 = G \cap \{x_2 = 0\}$;
- G – ograniczony obszar w $\mathbb{R}^2$ posiadający punkt kątowy na brzegu;
- ∂G – brzeg obszaru G; zakładamy, że $\mathcal{O} \in \partial G$;
- $\overline{G} = G \cup \partial G$ – domknięcie obszaru G;
- $\operatorname{meas} G$ – miara Lebesque'a obszaru G;
- $\operatorname{diam} G$ – średnica obszaru G;
- dx – element powierzchni w $\mathbb{R}^2$;
- ds – element długości w $\mathbb{R}$;
- $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2)$ – zewnętrzny wektor jednostkowy normalny do ∂G;
- $\mathcal{C}$: kąt $\{x_1 > r \cos \frac{\omega_0}{2};\ -\infty < x_2 < \infty,\ \omega_0 \in [0, 2\pi)\}$ o środku w punkcie $\mathcal{O}$;
- Ω: łuk otrzymany z przecięcia kąta $\mathcal{C}$ z okręgiem S : $\Omega = \mathcal{C} \cap S = \Big(-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\Big)$;
- $G_a^b = \Big\{(r, \omega);\ 0 \leqslant a < r < b;\ \omega \in \Omega\Big\} \cap G$: pierścień w $\mathbb{R}^2$;
- $\Gamma_{a\pm}^b = \{(r, \omega);\ 0 \leqslant a < r < b;\ \omega = \pm\frac{\omega_0}{2}\} \cap \partial G$: powierzchnia boczna obszaru G_a^b;
- $G_d = G \setminus G_0^d;\ \Gamma_{d\pm} = \Gamma_\pm \setminus \Gamma_{0\pm}^d,\ \ d > 0$;
- $G_0 = \Big\{(r, \omega)\Big| r > 0;\ -\frac{\omega_0}{2} < \omega < \frac{\omega_0}{2},\ \ \omega_0 \in (0, \pi)\Big\} \subset \mathbb{R}^2$;
- $D_i u := \frac{\partial u}{\partial x_i}$;
- $\nabla u := (D_1 u, D_2 u)$;
- $|\nabla u| := (\sum\limits_{i=1}^{2} (D_i u)^2)^{1/2}$;
- δ_i^j – symbol Kroneckera.

Bez straty ogólności zakładamy, że istnieje $d > 0$ takie, że G_0^d jest *kątem* o wierzchołku w punkcie $\mathcal{O}$ oraz mierze $\omega_0 \in (0, 2\pi)$, wówczas

$$\Gamma_{0\pm}^d = \left\{(x_1, x_2)\Big|\ x_1 = \pm x_2 \operatorname{ctg} \frac{\omega_0}{2};\ |x| \leqslant d\right\}. \tag{6.1}$$

Następnie przedstawiamy przydatne definicje

Definicja 1. Funkcje $\mathcal{A}$ nazywamy ciągłą w zerze w sensie Diniego jeżeli całka

$$\int\limits_0^d \frac{\mathcal{A}(t)}{t} dt$$

jest skończona dla pewnego $d > 0$.

Przestrzenie funkcyjne używane w dalszej części:

- przestrzeń $C^k(\overline{G})$ z normą $|u|_{k,\overline{G}}$;
- przestrzeń Lebesque'a $L_p(G)$, $p \geqslant 1$ z normą $\|u\|_{p,G}$;
- przestrzeń Sobolewa $W^{k,p}(G)$, dla naturalnych $k \geqslant 0$ i rzeczywistych $1 \leqslant p < \infty$ z normą $\|u\|_{p,k,(G)} = \left(\int\limits_G \sum\limits_{|\beta|=0}^{k} |D^\beta u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$;
- przestrzeń wagową Sobolewa $V^k_{p,\alpha}(G)$, dla naturalnych $k \geqslant 0$, rzeczywistych α oraz $1 \leqslant p < \infty$, z normą $\|u\|_{V^k_{p,\alpha}(G)} = \left(\int\limits_G \sum\limits_{|\beta|=0}^{k} r^{\alpha+p(|\beta|-k)} |D^\beta u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

Piszemy $W^k(G)$ zamiast $W^{k,2}(G)$, $\overset{\circ}{W}{}^k_\alpha(G)$ zamiast $V^k_{2,\alpha}(G)$.

W **rozdziale trzecim** rozważamy zagadnienie na wartości własne:

$$\begin{cases} (|\psi'(\omega)|^{m-2}\psi'(\omega))' + \vartheta|\psi(\omega)|^{m-2}\psi(\omega) = 0, & \omega \in \Omega \\ \left|\psi'\left(\frac{\omega_0}{2}\right)\right|^{m-2} \psi'\left(\frac{\omega_0}{2}\right) + \beta_+ \left|\psi\left(\frac{\omega_0}{2}\right)\right|^{m-2} \psi\left(\frac{\omega_0}{2}\right) & \\ \qquad\qquad + b\left|\psi(0)\right|^{m-2} \psi(0) = 0 & \\ -\left|\psi'\left(-\frac{\omega_0}{2}\right)\right|^{m-2} \psi'\left(-\frac{\omega_0}{2}\right) + \beta_- \left|\psi\left(-\frac{\omega_0}{2}\right)\right|^{m-2} \psi\left(-\frac{\omega_0}{2}\right) = 0, & \end{cases} \tag{$QEVP$}$$

gdzie $m \geqslant 2$, $\beta_+, \beta_- > 0$, $b \geqslant 0$. Polega ono na wyznaczeniu wszystkich wartości ϑ (wartości własnych) dla których zagadnienie $(QEVP)$ posiada niezerowe słabe rozwiązanie (funkcję własną) $\psi \in W^{1,m}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

W przypadku liniowym $(m = 2)$ zagadnienie na wartości własne $(QEVP)$ ma postać

$$\begin{cases} \psi''(\omega) + \lambda^2\psi(\omega) = 0, & \omega \in \Omega \\ \psi'\left(\frac{\omega_0}{2}\right) + \beta_+\psi\left(\frac{\omega_0}{2}\right) + b\psi(0) = 0, & \\ -\psi'\left(-\frac{\omega_0}{2}\right) + \beta_-\psi\left(-\frac{\omega_0}{2}\right) = 0, & \end{cases} \tag{EVP}$$

gdzie $\lambda^2 = \vartheta$.

Zbadano własności rozwiązywalności (EVP). Rozwiązując je otrzymujemy funkcję własną ψ postaci

$$\psi(\omega) = \beta_- \sin\lambda\left(\omega + \frac{\omega_0}{2}\right) + \lambda\cos\lambda\left(\omega + \frac{\omega_0}{2}\right) \tag{6.2}$$

oraz wartość własną λ, która jest pierwiastkiem równania

$$f(\lambda) \stackrel{def}{\equiv} \lambda(\beta_+ + \beta_-)\cos\lambda\omega_0 + (\beta_+\beta_- - \lambda^2)\sin\lambda\omega_0 \\ + b\left(\lambda\cos\frac{\lambda\omega_0}{2} + \beta_-\sin\frac{\lambda\omega_0}{2}\right) = 0. \tag{6.3}$$

W dalszej części tego rozdziału wyprowadzamy dostosowaną do naszych zagadnień nową nierówność *typu Friedrichsa-Wirtingera,* która jest dostosowana do rozważanych nielokalnych zagadnień.

Twierdzenie 2. *Niech $\Omega \subset S$ będzie łukiem , $m \geqslant 2$, ϑ będzie wartością własną zagadnienia (QEVP), natomiast $\psi \in W^{1,m}(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ będzie stowarzyszoną z nią funkcja własną. Wówczas dla każdej funkcji $u \in W^{1,m}(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$, $u \not\equiv const \neq 0$ zachodzi nierówność*

$$\vartheta\int\limits_\Omega |u(\omega)|^m d\omega \leqslant \int\limits_\Omega |u'(\omega)|^m\, d\omega + \mathcal{B}\left|u\left(\frac{\omega_0}{2}\right)\right|^m + \beta_-\left|u\left(-\frac{\omega_0}{2}\right)\right|^m, \tag{$(W)_m$}$$

gdzie

$$\mathcal{B} = b\psi(0)|\psi(0)|^{m-2}\psi\left(\frac{\omega_0}{2}\right)\left|\psi\left(\frac{\omega_0}{2}\right)\right|^{-m} + \beta_+. \tag{6.4}$$

Uwaga 3. Nierówność $(W)_m$ jest najlepszą możliwą tzn. stała ϑ w tej nierówności jest dokładna.

Na podstawie warunków brzegowych (EVP) oraz z postaci (6.2), dla $m = 2$, mamy:

$$\begin{aligned} B &= b\frac{\psi(0)}{\psi\left(\frac{\omega_0}{2}\right)} + \beta_+ = \frac{-\psi'\left(\frac{\omega_0}{2}\right) - \beta_+\psi\left(\frac{\omega_0}{2}\right)}{\psi\left(\frac{\omega_0}{2}\right)} + \beta_+ = -\frac{\psi'\left(\frac{\omega_0}{2}\right)}{\psi\left(\frac{\omega_0}{2}\right)} \\ &= \frac{\lambda(\lambda\sin\lambda\omega_0 - \beta_-\cos\lambda\omega_0)}{\beta_-\sin\lambda\omega_0 + \lambda\cos\lambda\omega_0} \equiv B(\lambda). \end{aligned} \tag{6.5}$$

W tymże rozdziale otrzymujemy także inne całkowo - różniczkowe nierówności pomocnicze mające zastosowanie w badaniu zachowania się słabych rozwiązań rozpatrywanych zagadnień w pobliżu punktu kątowego $\mathcal{O}$ na brzegu obszaru G.

W **rozdziale czwartym,** stosując inne metody niż te użyte przez Skubaczewskiego [39] i Gurewicza [29] , badamy zachowanie się słabych rozwiązań $u \in C^0(\overline{G}) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_0(G)$ nielokalnego, liniowego zagadnienia Robina (L) w pobliżu punktu kątowego na brzegu.

Wyniki przedstawione w tym rozdziale oparte są na pracach [Z] i [BZ]. Otrzymano w nich oszacowanie modułu słabych rozwiązań zagadnienia (L) w pobliżu punktu kątowego $\mathcal{O}$ na brzegu. W pracy [Z] jest rozważone zagadnienie (EVP) na wartości własne niezawierające nielokalnego składnika $b\psi(0)$ oraz otrzymana została odpowiednia, dla tak sformułowanego zagadnienia (EVP), nierówność typu Friedrichs'a-Wirtingera. Natomiast w artykule [BZ] rozważone zostało zagadnienie (EVP) z nielokalnym składnikiem (takie jak na stronie 8). Dla tak sformułowanego (EVP) otrzymana została ściślejsza nierówność typu Friedrichs'a-Wirtingera zawierająca składnik $b\frac{\psi(0)}{\psi(\omega_0/2)}$. Uzyskanie tego wyniku doprowadziło w konsekwencji do ściślejszego oszacowania modułu słabych rozwiązań postawionego zagadnienia w pobliżu punktu kątowego na brzegu obszaru: $|u(x)| = O(|x|^\alpha)$ z lepszym wykładnikiem α.

Niech $G \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem ograniczonym o brzegu $\partial G = \overline{\Gamma}_+ \cup \overline{\Gamma}_-$, który wszędzie, za wyjątkiem początku $\mathcal{O} \in \partial G$ układu współrzędnych (x_1, x_2), jest gładką krzywą, a w pobliżu punktu $\mathcal{O}$ krzywe $\Gamma_\pm$ są bokami kąta o mierze $\omega_0 \in [0, 2\pi)$ i wierzchołku $\mathcal{O}$. Zakładamy, że $\Sigma_0 = G \cap \{x_2 = 0\}$, przy czym $\mathcal{O} \in \overline{\Sigma}_0$ (patrz Rys. 1). Ponadto, niech γ będzie dyfeomorfizmem odwzorowującym Γ_+ na Σ_0. Zakładamy, że istnieje $d > 0$ takie, że w sąsiedztwie punktu $\mathcal{O}$ odwzorowanie γ jest obrotem o kąt $-\frac{\omega_0}{2}$, wówczas $\gamma(\overline{\Gamma^d_{0+}}) = \overline{\Sigma^d_0} = \overline{G^d_0} \cap \Sigma_0$.

Rozważamy następujące nielokalne zagadnienia eliptyczne z nielokalnym warunkiem Robina łączącym wartości niewiadomej funkcji u na krzywej Γ_+ z wartościami u na Σ_0 :

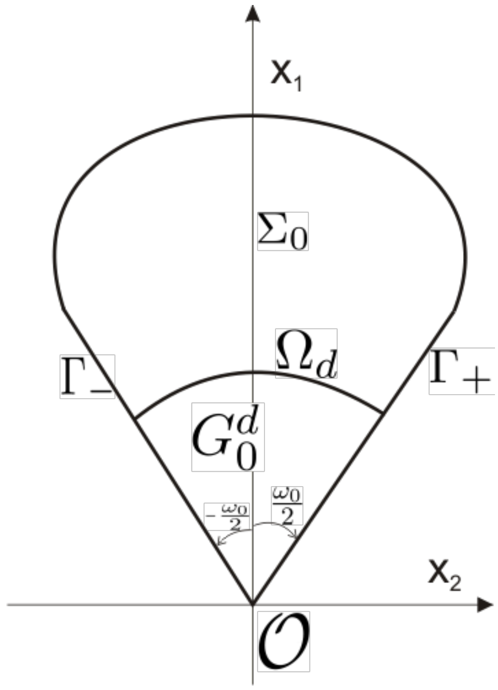
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(x)u_{x_j}\right) + b^i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x), & x \in G \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta_+\frac{u(x)}{|x|} + \frac{b}{|x|}u\Big(\gamma(x)\Big) = g(x), & x \in \Gamma_+ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta_-\frac{u(x)}{|x|} = h(x), & x \in \Gamma_-; \end{cases} \tag{L}$$

tutaj:

- $\beta_+ > 0,\ \beta_- > 0,\ b \geqslant 0$ są danymi liczbami;
- $\frac{\partial}{\partial \nu} = a^{ij}(x)\cos(\overrightarrow{n}, x_i)\frac{\partial}{\partial x_j}$.

W przedstawionym zagadnieniu zachodzi sumowanie po powtarzających się indeksach od 1 do 2, natomiast $\vec{n}$ oznacza jednostkowy wektor normalny do $\partial G \setminus \mathcal{O}$ zewnętrzny względem G.

W odniesieniu do zagadnienia (L) przyjmujemy, że spełnione są następujące **założenia:**



Rysunek 1: Obszar z punktem kątowym

(a) warunek jednostajnej eliptyczności:

$$\nu\xi^2 \leqslant a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \quad \forall x \in \overline{G}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2; \ \ \nu,\mu = const > 0$$

(bez straty ogólności możemy założyć, że $\nu \leqslant 1$),

$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x), \quad \forall x \in \overline{G}, \ \ a^{ij}(0) = \delta_i^j, \ (i,j = 1,2),$$

gdzie δ_i^j jest symbolem Kroneckera;

(b) $a^{ij}(x) \in C^0(\overline{G})$, $\quad b^i(x) \in L_p(G)$, $c(x) \in L_{p/2}(G) \cap L_2(G), p > 2$; ponadto spełniają nierówność

$$\left(\sum_{i,j=1}^{2} |a^{ij}(x) - a^{ij}(0)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + |x|\left(\sum_{i=1}^{2} |b^i(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + |x|^2|c(x)| \leqslant \mathcal{A}(|x|)$$

dla wszystkich $x \in \overline{G}$, gdzie $\mathcal{A}(r)$ monotonicznie rosnącą nieujemną funkcją, ciągłą w 0 oraz taką, że $\mathcal{A}(0) = 0$;

(c) $c(x) \leqslant 0$ w obszarze G; $\quad b \geqslant 0$, $\beta_+, \beta_- > 0$;

(d) $f(x) \in L_{p/2}(G) \cap L_2(G)$, $g(x) \in L_\infty(\Gamma_+)$, $h(x) \in L_\infty(\Gamma_-)$, $p > 2$;

(e) istnieją liczby $f_0 \geqslant 0$, $g_0 \geqslant 0$, $h_0 \geqslant 0$, $s > 2 - \frac{4}{p}$, $p > 2$ takie, że

$$|f(x)| \leqslant f_0|x|^{s-2}, \quad |g(x)| \leqslant g_0|x|^{s-1}, \quad |h(x)| \leqslant h_0|x|^{s-1};$$

(f) $M_0 = \max_{x \in \overline{G}} |u(x)|$ *(w rozprawie udowodniono oszacowanie a priori modułu słabych rozwiązań zagadnienia* (L) *w jednym z możliwych przypadków - patrz podrozdział 4.3).*

Zasadniczym nowym podejściem jest badanie regularności rozwiązań rozpatrywanych zagadnień liniowych dla równań eliptycznych przy minimalnych założeniach na gładkość współczynników równania. Na początku, zakładając wypukłość obszaru G oraz stosując technikę funkcji barierowej jak również zasadę porównawczą, wyprowadzamy wstępne oszacowanie $|u(x)-u(0)| \leqslant C|x|^{\varkappa+1}$, $\varkappa > 0$ słabych rozwiązań w pobliżu punktu kątowego na brzegu. Dalej, w jednym z możliwych przypadków, w oparciu o metodę De Giorgiego i Stampacchia, otrzymujemy oszacowanie a priori modułu słabych rozwiązań zagadnienia (L). Następnie, stosując metodę pierścieni Kondratiewa [19] oraz iteracyjną metodę Mosera (patrz [36, 37]) dowodzimy lokalnej ograniczoności słabych rozwiązań zagadnienia (L). W kolejnym podrozdziale, korzystając z wcześniej wyprowadzonych całkowo - różniczkowych nierówności, otrzymujemy globalne i lokalne oszacowanie wagowej całki Dirichleta. Ostatecznie używając wcześniej otrzymanych wyników znajdujemy wykładnik potęgi modułu ciągłości słabych rozwiązań w pobliżu punktu kątowego $\mathcal{O}$. Oszacowanie zachowania się rozwiązania w pobliżu punktu osobliwego na brzegu jest otrzymane przy założeniu, że główne współczynniki równania spełniają warunek ciągłości względem Diniego, natomiast młodsze współczynniki mogą rosnąć.

Teraz zostaną przedstawione główne wyniki przeprowadzonych badań dla liniowego, nielokalnego zagadnienia Robina (L).

Twierdzenie 4. *Niech u będzie słabym rozwiązaniem zagadnienia (L) oraz niech założenia (a) – (f) będą spełnione z funkcją $\mathcal{A}(r)$, która spełnia warunek ciągłości w zerze w sensie Diniego. Niech λ^2 będzie najmniejszą dodatnią wartością własną zagadnienia (EVP). Ponadto, załóżmy że*

$$0 < b < \frac{2}{\omega_0}\left(\nu + \sqrt{\nu^2 + \nu\omega_0\beta_+}\right). \tag{6.6}$$

Wówczas istnieją $d \in (0, 1/e)$, gdzie e jest liczbą Eulera, oraz stała $C > 0$ zależąca od ν, μ, p, $\left\|\sum_{i=1}^2 |b^i(x)|^2\right\|_{p/2,G}$, ω_0, b, β_+, β_-, f_0, h_0, g_0, $\|f(x)\|_{2,G}$, $\|g(x)\|_{\infty,\Gamma_+}$, $\|h(x)\|_{\infty,\Gamma_-}$, s, M_0, meas G, diam G, meas Γ_+, meas Γ_- jak również od wartości $\int_0^{1/e} \frac{\mathcal{A}(r)}{r}dr$

takie, że dla każdego x należącego do obszaru $\overline{G_0^d}$ zachodzi poniższe oszacowanie

$$|u(x)| \leqslant C \begin{cases} |x|^{\lambda k_\pm}, & \text{jeżeli } s > \lambda k_\pm \\ |x|^{\lambda k_\pm} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right), & \text{jeżeli } s = \lambda k_\pm \\ |x|^s, & \text{jeżeli } s < \lambda k_\pm, \end{cases} \tag{6.7}$$

gdzie

$$(0,1] \ni k_\pm = \begin{cases} \frac{2(\beta_+ + b + \mathcal{B}) - \sqrt{4(\beta_+ + b - \mathcal{B})^2 + 2\mathcal{B}b^2\omega_0}}{4\mathcal{B}}, & \text{jeżeli } \mathcal{B} > 0 \\ \\ \frac{2(\beta_+ + b + 1) - \sqrt{4(\beta_+ + b - 1)^2 + 2b^2\omega_0}}{4}, & \text{jeżeli } \mathcal{B} \leqslant 0 \end{cases} \tag{6.8}$$

oraz $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\lambda)$ jest określone (6.5).

Uwaga 5. Na podstawie (6.5), wnioskujemy, że jeżeli $b = 0$, wówczas $\mathcal{B} = \beta_+$ oraz $k_+ = 1$. Ten fakt pokrywa się z wynikami otrzymanymi w [15].

Zbadano również zachowanie się słabego rozwiązania zagadnienia (L) w pobliżu punktu kątowego na brzegu przy dodatkowych założeniach na warunki brzegowe. W tym szczególnym przypadku uzyskano lepsze oszacowanie modułu słabego rozwiązania. Wykładnik nie zależy już od wartości $k_\pm$. Równy jest on natomiast najmniejszej wartości własnej otrzymanej dla tego zagadnienia, która wynosi $\lambda = \frac{\pi}{\omega_0}$.

Twierdzenie 6. *Niech u będzie słabym rozwiązaniem zagadnienia (L) oraz niech spełnione będą założenia $(a) - (f)$ z funkcją $\mathcal{A}(r)$ ciągłą w zerze w sensie Diniego. Załóżmy dodatkowo, że $\beta_+ u^2(x)_{|\Gamma_+} + \beta_- u^2(x)_{|\Gamma_-} + bu(x)_{|\Gamma_+} \cdot u\big(\gamma(x)\big)_{|\Gamma_+} = 0$, $b = \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \frac{\beta_+ + \beta_-}{\beta_-}$ i $u^2(x)_{|\Gamma_+} = u^2(x)_{|\Gamma_-}$. Wówczas istnieją $d \in (0, 1/e)$ i stała $C > 0$ zależąca od ν, μ, p, $\left\|\sum_{i=1}^2 |b^i(x)|^2\right\|_{\frac{p}{2},G}$, ω_0, b, β_+, β_-, f_0, h_0, g_0, $\|f(x)\|_{2,G}$, $\|g(x)\|_{\infty,\Gamma_+}$, $\|h(x)\|_{\infty,\Gamma_-}$, s, M_0, meas G, diam G, meas Γ_+, meas Γ_- oraz wartości $\int_0^{1/e} \frac{\mathcal{A}(r)}{r} dr$ takie, że dla wszystkich x należących do obszaru $\overline{G_0^d}$ zachodzi oszacowanie*

$$|u(x)| \leqslant C \begin{cases} |x|^{\frac{\pi}{\omega_0}}, & \text{jeżeli } s > \frac{\pi}{\omega_0} \\ |x|^{\frac{\pi}{\omega_0}} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right), & \text{jeżeli } s = \frac{\pi}{\omega_0} \\ |x|^s, & \text{jeżeli } s < \frac{\pi}{\omega_0}. \end{cases}$$

W rozdziale tym przedstawiony jest również przykład pokazujący, że warunek Diniego wobec starszych współczynników równania w punkcie kątowym jest konieczny dla poprawności otrzymanego twierdzenia.

Przykład 7. Rozważamy obszar G_0 o brzegu $\partial G = \mathcal{O} \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_-$, gdzie $\Gamma_\pm = \left\{r > 0, \omega = \pm\frac{\omega_0}{2}\right\}$. Niech $b = \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \frac{\beta_+ + \beta_-}{\beta_-}$, wówczas funkcja

$$u(r,\omega) = r^\lambda \left(\ln \frac{1}{r}\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} \left[\beta_- \cos(\lambda\omega) - \lambda \sin(\lambda\omega)\right], \quad \lambda = \frac{\pi}{\omega_0}$$

jest rozwiązaniem zagadnienia:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(x)u_{x_j}\right) + c(x)u = 0, & x \in G_0, \\ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta_+ \frac{u(x)}{r} + \frac{b}{r} u\Big(\gamma(x)\Big) = g(x), & x \in \Gamma_+; \\ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta_- \frac{u(x)}{r} = h(x), & x \in \Gamma_-, \end{cases}$$

gdzie

$$\begin{aligned} a^{11}(x) &= 1 - \frac{2}{\lambda+1} \cdot \frac{x_2^2}{r^2 \ln \frac{1}{r}}; \\ a^{12}(x) &= a^{21}(x) = \frac{2}{\lambda+1} \cdot \frac{x_1 x_2}{r^2 \ln \frac{1}{r}}; \\ a^{22}(x) &= 1 - \frac{2}{\lambda+1} \cdot \frac{x_1^2}{r^2 \ln \frac{1}{r}}; \\ a^{ij}(0) &= \delta_i^j, (i,j = 1,2), \\ c(x) &= -\frac{2}{1+\lambda} \cdot \frac{1}{r^2 \ln^2 \frac{1}{r}} \left(\lambda \ln \frac{1}{r} - \frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right), \\ g(x) &= h(x) = \frac{2\pi\beta_-}{(\lambda+1)\omega_0} \frac{r^{\lambda-1}}{\ln^{\frac{2}{\lambda+1}} \frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Ponadto, w obszarze G_0^d, $d < e^{-4}$ równanie jest jednostajnie eliptyczne ze stałymi eliptyczności $\mu = 1$, $\nu = 1 - \frac{4}{\ln \frac{1}{d}}$ i $\mathcal{A}(r) = \frac{2}{\lambda+1} \ln^{-1}\left(\frac{1}{r}\right)$. Funkcja $\mathcal{A}(r)$ *nie spełnia* warunku Diniego w zerze:

$$\int_0^d \frac{1}{r \ln \frac{1}{r}} dr = +\infty.$$

Poza tym, współczynniki $a^{ij}(x)$ są ciągłe w punkcie $\mathcal{O}$, $c(x) \leqslant 0$ i warunki $\beta_+ u^2(x)_{|\Gamma_+} + \beta_- u^2(x)_{|\Gamma_-} + bu(x)_{|\Gamma_+} \cdot u\Big(\gamma(x)\Big)_{|\Gamma_+} = 0$, $\quad u^2(x)_{|\Gamma_+} = u^2(x)_{|\Gamma_-}$ Twierdzenia 6 są spełnione. Przykład ten pokazuje, że wymaganie Dini-ciągłości starszych współczynników w zerze w Twierdzeniu 6 jest konieczne dla tego by $u(x) = O(|x|^\lambda)$.

W ostatnim podrozdziale dla wypukłego obszaru kątowego G, stosując funkcję quasi-odstępu $r_\varepsilon(x)$, dowodzimy ogólniejszą postać twierdzenia o globalnym oszacowaniu wagowej całki Dirichleta.

Rozdział piąty poświęcony jest badaniu zachowania się słabych rozwiązań $u \in C^0(\overline{G}) \cap V^1_{m,0}(G)$ quasiliniowego nielokalnego zagadnienia Robina (QL) dla równań eliptycznych drugiego rzędu w pobliżu punktu kątowego na brzegu:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx_i}(|u|^q|\nabla u|^{m-2}u_{x_i}) + a_0r^{-m}u|u|^{q+m-2} \\ \qquad\qquad -\theta u|u|^{q-2}|\nabla u|^m = f(x), \quad x \in G \\ |u|^q|\nabla u|^{m-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \beta_+|x|^{1-m}u|u|^{q+m-2} \\ \quad +b|x|^{1-m}u\Big(\gamma(x)\Big)\Big|u\Big(\gamma(x)\Big)\Big|^{q+m-2} = g(x,u), \quad x \in \Gamma_+ \\ |u|^q|\nabla u|^{m-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \beta_-|x|^{1-m}u|u|^{q+m-2} = h(x,u), \quad x \in \Gamma_-; \end{cases} \tag{QL}$$

tutaj:

- $q \geqslant 0,\ m \geqslant 2,\ \theta \geqslant 0,\ a_0 \geqslant 0,\ \beta_+ > 0,\ \beta_- > 0,\ b \geqslant 0$ są danymi liczbami.

W odniesieniu do zagadnienia (QL) przyjmujemy, że spełnione są następujące **założenia.**

(i) *Niech* $p > \tilde{n} > m \geqslant 2,\ 0 \leqslant \theta < \frac{q+m-1}{m-1}$ *będą danymi liczbami; funkcje* $g(x,u) : \Gamma_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *oraz* $h(x,u) : \Gamma_- \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będą różniczkowalnymi w sposób ciągły względem u funkcjami Caratheodory'ego,*

(ii) $\frac{\partial h(x,u)}{\partial u} \leqslant 0,\ \frac{\partial g(x,u)}{\partial u} \leqslant 0;$

(iii) $f(x) \in L_{\frac{p}{m}}(G)$; $g(x,0),\ h(x,0) \in W^{1,\frac{p}{m-1}}(G)$ oraz istnieją dodatnie stałe g_1, h_1 takie, że

$$\left|\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right| \leqslant g_1|u|^{m-1}, \quad x \in \Gamma_+; \qquad \left|\frac{\partial h(x,u)}{\partial u}\right| \leqslant h_1|u|^{m-1}, \quad x \in \Gamma_-;$$

(iv) $0 \leqslant b < \min\left\{\frac{(m-1)^{m-2}\cdot[(m-1)(1-\theta)+q]}{(q+m-1)^m\cdot\max\{1,2^{m-3}\}\left(\frac{\omega_0}{2}\right)^{m-1}}; \frac{\beta_+}{(m-1)\max\{1,2^{m-3}\}-1}\right\}.$

Znajdujemy wykładnik potęgi modułu ciągłości słabego rozwiązania w pobliżu punktu osobliwego $\mathcal{O}$. Mianowicie, wyprowadzamy oszacowania modułu słabych rozwiązań zagadnienia (QL) typu $u(x) = O(|x|^\alpha)$. Otrzymujemy również globalne i lokalne oszacowania wagowych i niewagowych całek Dirichleta oraz wyprowadzamy globalne oszacowania a priori modułu słabych rozwiązań. W dowodzeniu powyższych własności wykorzystujemy metody użyte w rozdziale czwartym: całkowo-różniczkowych nierówności, pierścieni Kondratiewa, metodę De Giorgiego - Stampacchia i metodę iteracyjną Mosera.

Zdefiniujmy teraz pewne wartości, które będą przydatne w przedstawieniu głównych wyników rozpatrywanego problemu (QL). Niech

$$\mathcal{K}_- := \min\left\{(1-\theta\varsigma) - b\varsigma^{1-m}(m-1)\max\left\{1, 2^{m-3}\right\}\left(\frac{\omega_0}{2}\right)^{m-1}; \varsigma^{1-m}\right\}, \tag{6.9}$$

$$\mathcal{K}_+ := \min\left\{\mathcal{K}_-; \frac{\varsigma^{1-m}}{\mathcal{B}}\left(\beta_+ + b - b(m-1)\max\left\{1, 2^{m-3}\right\}\right)\right\}, \quad \mathcal{B} > 0 \tag{6.10}$$

oraz

$$\widetilde{\vartheta_\pm} := \begin{cases} \dfrac{\mathcal{K}_+ \vartheta^{\frac{1}{m}}}{m\sqrt{\frac{m}{2}}\cdot\left(\frac{2}{m+2}\right)^{\frac{m+2}{2m}}}, & \text{jeżeli} \quad \mathcal{B} > 0 \\ \\ \dfrac{\mathcal{K}_- \vartheta^{\frac{1}{m}}}{m\sqrt{\frac{m}{2}}\cdot\left(\frac{2}{m+2}\right)^{\frac{m+2}{2m}}}, & \text{jeżeli} \quad \mathcal{B} \leqslant 0, \end{cases} \tag{6.11}$$

gdzie $\varsigma = \frac{m-1}{q+m-1}$, $\mathcal{B}$ jest zdefiniowana w $(W)_m$, natomiast ϑ jest najmniejszą dodatnią wartością własną zagadnienia na wartości własne $(QEVP)$.

Głównym wynikiem tej części pracy jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 8. *Niech u będzie słabym rozwiązaniem zagadnienia (QL) oraz niech warunki $(i)-(iv)$ będą spełnione. Załóżmy także, że znana jest wartość $M_0 = \max\limits_{x\in\overline{G}} |u(x)|$. Dodatkowo przypuśćmy istnienie rzeczywistych liczb $k_\sigma \geqslant 0$, $K \geqslant 0$ takich ,że*

$$k_\sigma =: \sup_{\varrho>0} \varrho^{-m\sigma}\left\{\int\limits_{G_0^\varrho} |f(x)|^{\frac{m}{m-1}}dx + \int\limits_{\Gamma_{0+}^\varrho} |g(x,0)|^{\frac{m}{m-1}}ds \right. \\ \left. + \int\limits_{\Gamma_{0-}^\varrho} |h(x,0)|^{\frac{m}{m-1}}ds\right\}, \quad \sigma > 1; \tag{6.12}$$

$$K =: \sup_{\varrho>0} \frac{\varrho^{\frac{2}{m}-1}}{\psi(\varrho)}\left\{\varrho^{\frac{m(p-2)}{p(m-1)}}\|f(x)\|^{\frac{1}{m-1}}_{\frac{p}{m},G_0^\varrho} + \varrho^{\frac{m-1}{m}-\frac{2}{p}}\left(\|g(x,0)\|^{\frac{1}{m-1}}_{\frac{p}{m-1},G_0^\varrho}\right.\right. \\ \left.\left. + \|h(x,0)\|^{\frac{1}{m-1}}_{\frac{p}{m-1},G_0^\varrho}\right) + \varrho^{\frac{m^2-m+1}{m(m-1)}-\frac{2}{p}}\left(\|\nabla g(x,0)\|^{\frac{1}{m-1}}_{\frac{p}{m-1},G_0^\varrho} + \|\nabla h(x,0)\|^{\frac{1}{m-1}}_{\frac{p}{m-1},G_0^\varrho}\right)\right\}, \tag{6.13}$$

gdzie

$$\psi(\varrho) = \begin{cases} \varrho^{\widetilde{\vartheta}_\pm}, & \text{jeżeli} \quad \sigma > \widetilde{\vartheta}_\pm \\ \varrho^{\widetilde{\vartheta}_\pm}\ln^{\frac{1}{m}}\left(\frac{1}{\varrho}\right), & \text{jeżeli} \quad \sigma = \widetilde{\vartheta}_\pm \\ \varrho^\sigma, & \text{jeżeli} \quad \sigma < \widetilde{\vartheta}_\pm. \end{cases} \tag{6.14}$$

Wówczas istnieją $d \in (0,1)$ i stała $C_0 > 0$ niezależna od u taka ,że

$$|u(x)| \leqslant C_0\left(|x|^{1-\frac{2}{m}}\psi(|x|)\right)^{\frac{m-1}{q+m-1}}, \quad \forall x \in G_0^d. \tag{6.15}$$

W **rozdziale szóstym** badamy zachowanie się słabych rozwiązań $u \in C^0(\overline{G}) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_0(G)$ słabo quasiliniowego nielokalnego zagadnienia (WQL) Robina dla równań eliptycznych drugiego rzędu w pobliżu punktu kątowego na brzegu:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx_i}\Big(a^{ij}(x)|u|^q u_{x_j}\Big) + a(x,u,\nabla u) = 0, & x \in G \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\beta_+}{|x|}u|u|^q + \frac{b}{|x|}u\Big(\gamma(x)\Big)\Big|u\Big(\gamma(x)\Big)\Big|^q = g(x,u), & x \in \Gamma_+ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\beta_-}{|x|}u|u|^q = h(x,u), & x \in \Gamma_-; \end{cases} \qquad (WQL)$$

tutaj:

- $\frac{\partial}{\partial \nu} = a^{ij}|u|^q(x)\cos(\overrightarrow{n}, x_i)\frac{\partial}{\partial x_j}$.

W odniesieniu do zagadnienia (WQL) przyjmujemy, że spełnione są następujące **założenia:**

1) $q \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta < \nu(q+1),\ f_0 \geqslant 0,\ g_0 \geqslant 0,\ h_0 \geqslant 0$ *są danymi liczbami;*

2) warunek jednostajnej eliptyczności:

$$\nu\xi^2 \leqslant a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \quad \forall x \in \overline{G}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n;\ \nu,\ \mu = const > 0,$$

(bez straty ogólności możemy założyć, że $\nu \leqslant 1$),

$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x), \quad \forall x \in \overline{G},\ \ a^{ij}(0) = \delta_i^j,\ (i,j = 1,2);$$

3) $a^{ij}(x) \in C^0(\overline{G})$ *oraz spełniona jest nierówność*

$$\left(\sum_{i,j=1}^{2} |a^{ij}(x) - a^{ij}(y)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \mathcal{A}(|x-y|)$$

dla każdego $x, y \in \overline{G}$, gdzie $\mathcal{A}(r)$ jest monotonicznie rosnącą, nieujemną funkcją ciągłą w zerze i taką, że $\mathcal{A}(0) = 0$;

4) $|a(x,u,u_x)| \leqslant \theta|u|^{q-1}|\nabla u|^2 + f(x); \quad f(x) \in L_{p/2}(G), \quad p > 2;$

5) $\frac{\partial h(x,u)}{\partial u} \leqslant 0,\ \frac{\partial g(x,u)}{\partial u} \leqslant 0$ *oraz* $g(x,0) \in L_\infty(\Gamma_+),\ h(x,0) \in L_\infty(\Gamma_-);$

6) $|f(x)| \leqslant f_0|x|^{s-2},\ |g(x,0)| \leqslant g_0|x|^{s-1},\ |h(x,0)| \leqslant h_0|x|^{s-1},\ s > 2 - \frac{4}{p};$

7) $M_0 = \max\limits_{x \in \overline{G}} |u(x)|.$

Podobnie jak dla zagadnień (L) i (QL) tutaj również znajdujemy wykładnik potęgi modułu ciągłości rozwiązania w pobliżu punktu osobliwego $\mathcal{O}$. Stosując metody: całkowo-różniczkowych nierówności, pierścieni Kondratiewa, metodę de Giorgiego - Stampacchia i schemat iteracyjny Mosera otrzymujemy globalne i lokalne oszacowania wagowych i niewagowych całek Dirichleta oraz wyprowadzamy globalne oszacowania a priori modułu słabych rozwiązań.

W tym miejscu warto odnotować, że nie wiadomo nam o jakichkolwiek wcześniejszych badaniach dotyczących zagadnień (QL), (WQL). W ten sposób badanie zachowania się rozwiązań tych nieliniowych problemów rozważone jest w tej pracy po raz pierwszy.

Głównym wynikiem tej części pracy jest następujcie twierdzenie

Twierdzenie 9. *Niech u będzie słabym rozwiązaniem zagadnienia (WQL) oraz niech założenia $1) - 7)$ będą spełnione z funkcją $\mathcal{A}(r)$ ciągłą w zerze w sensie Diniego. Niech λ^2 będzie najmniejszą dodatnią wartością własną zagadnienia (EVP). Dodatkowo przypuśćmy, że*

$$0 < b < \frac{2}{\omega_0}\left(\varsigma(\nu - \varsigma\theta) + \sqrt{\varsigma^2(\nu - \varsigma\theta)^2 + \beta_+\omega_0\varsigma(\nu - \varsigma\theta)}\right). \tag{6.16}$$

Wówczas istnieją $d \in (0, 1/e)$ oraz stała $C > 0$ zależąca od $\nu, \mu, \theta, p,$ $\omega_0,$ $b,$ $\beta_+,$ $\beta_-,$ $f_0,$ $h_0,$ $g_0,$ $\|f(x)\|_{2,G}, \|g(x,0)\|_{\infty,\Gamma_+}, \|h(x,0)\|_{\infty,\Gamma_-}$, $s,$ $M_0,$ meas G, diam G, meas Γ_+, meas Γ_- $\int\limits_0^{1/e} \frac{\mathcal{A}(r)}{r}dr$ takie, że dla wszystkich $x \in \overline{G_0^d}$ zachodzi oszacowanie:

$$|u(x)| \leqslant C \begin{cases} |x|^{\lambda\widetilde{k}_\pm}, & \text{jeżeli } s > \lambda\widetilde{k}_\pm \\ |x|^{\lambda\widetilde{k}_\pm} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right), & \text{jeżeli } s = \lambda\widetilde{k}_\pm \\ |x|^s, & \text{jeżeli } s < \lambda\widetilde{k}_\pm, \end{cases} \tag{6.17}$$

gdzie

$$(0,1] \ni \widetilde{k}_\pm = \begin{cases} \frac{2[\beta_+ + b + \mathcal{B}\varsigma(1-\varsigma\theta)] - \sqrt{4[\beta_+ + b + \mathcal{B}\varsigma(1-\varsigma\theta)]^2 + 2\mathcal{B}b^2\omega_0}}{4\mathcal{B}}, & \text{jeżeli } \mathcal{B} > 0 \\ \\ \frac{2[\beta_+ + b + \varsigma(1-\varsigma\theta)] - \sqrt{4[\beta_+ + b + \varsigma(1-\varsigma\theta)]^2 + 2b^2\omega_0}}{4}, & \text{jeżeli } \mathcal{B} \leqslant 0, \end{cases} \tag{6.18}$$

a $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\lambda)$ jest określona w (6.5).

Warto tutaj odnotować, iż wynik głównego twierdzenia rozdziału szóstego pokazuje, że słabe rozwiązania zagadnienia (WQL) mają tą samą regularność co słabe rozwiązania zagadnienia (L).

Rozdział siódmy zawiera dodatek, który jest zbiorem twierdzeń i nierówności wykorzystanych w pracy.

7 Spis publikacji naukowych autora rozprawy doktorskiej

[Z] *"Nonlocal Robin problem in a plane domain with a boundary corner point",* Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis, Studia Mathematica, **X,** 5-34 (2011).

[BZ] *"Nonlocal Robin problem for elliptic second order equations in a plane domain with a boundary corner point",* Applicationes Mathematicae, **38,** 4, 369-411 (2011) (współautor M. Borsuk).

Literatura

[1] A. Bensoussan, J.-L. Lions, *Impulse Control and Quasi-variational Inequalities,* Gauthier-Villars, Paris, (1984).

[2] A. V. Bicadze, A. A. Samarski , *On some simple generalizations of linear elliptic boundary value problems*, Sov. Math., **10** (1969).

[3] M.Sh. Birman, G.E. Skvortsov, *On the quadratic integrability of the highest derivatives of the Dirichlet problem in a domain with piecewise smooth boundary,* Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., **5**, 12 - 21 (1962), (in Russian).

[4] M.V. Borsuk, *Behavior of generalized solutions of the Dirichlet problem for second-order quasilinear elliptic equations of divergence type near a conical point,* Sibirsk. Mat. Zh., **31,** 6, 25-38 (1990).

[5] M.V. Borsuk, *Best possible estimates for solutions of the Dirichlet problem for linear elliptic nondivergence equations of second order in a neighborhood of a conical point of the boundary,* Mat. Sb. **182,** 1446-1462 (1991), Math. USSR Sbornik **74**, 1,, 185-201 (1993).

[6] M.V. Borsuk, *Estimates of solutions of the Dirichlet problem for a quasilinear non divergence elliptic equation of a second order near a corner boundary point,* St. Petersburg Math. J. **3**, 3, 1281-1302 (1992).

[7] M.V. Borsuk, *Behavior of solutions of the Dirichlet problem for a second-order quasilinear elliptic equation of general form near a corner point,* Ukrainan Mat. Zh. **44**, 2, 167-173 (1992).

[8] M.V. Borsuk, *On the solvability of the Dirichlet problem for second-order linear elliptic equations in a domain with a conical points,* Uspekhi mat. nauk. Moscow. **48**, 4, 176-177 (1993).

[9] M.V. Borsuk, *Estimates of solutions of Dirichlet problem for elliptic nondivergence second-order equations in a neighbourhood of a conical boundary point,* Differ. Uravn. **30**, 1, 104-108 (1994).

[10] M.V. Borsuk, *Estimates of generalized solutions of the Dirichlet problem for quasilinear second-order elliptic equations in a domain with a conical boundary point,* Differ. Uravn., **31,** 6, 1001-1007 (1995).

[11] M.V. Borsuk, *Behaviour of solutions of the Dirichlet problem for weakly nonlinear elliptic nondivergence equations in a neighborhood of the conical point of the boundary,* Differ. Uravn., **33,** 8, 1085-1094 (1997).

[12] M.V. Borsuk, *Dini-continuity of first derivatives of solutions of the Dirichlet problem for second-order linear equations in a nonsmooth domain,* Sibirsk. Mat. Zh. **39**, 2, 261-280 (1998); Ann. Polon. Math. **69,** 129-172 (1998).

[13] M.V. Borsuk, *The behaviour of solutions of elliptic quasilinear degenerate equations near a boundary edge,* Nonlinear boundary value problems **12,** 32-43 (2002); Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications **65,** 3, 347-384 (2004).

[14] M.V. Borsuk, *Degenerate elliptic boundary value problems of second order in nonsmooth domains,* Contemporary Mathematics. Fundamental directions, **13**, Moscow (2005); (in Russian); J. Math. Sci., **146,** 5, 6071-6212 (2007).

[15] M. Borsuk, *Transmission Problems for Elliptic second-Order Equations in Non-Smoooth Domains*, Frontiers in Mathematics, 218 p. (2010).

[16] M.V. Borsuk, M. Dobrowolski, *On the bahavior of solutions of Dirichlet problem for semilinear second order elliptic equations in a neighborhood of conical boundary point,* Nonlinear boundary value problems **7,** 47-56 (1997).

[17] M.V. Borsuk, M. Dobrowolski, *On the behavior of solutions of the Dirichlet problem for a class of degenerate elliptic equations in the neighborhood of conical boundary points,* Nonlinear boundary value problems **9,** 29-34 (1999).

[18] M.V. Borsuk, A.Zawadzka, *Best possible estimates of solutions to the Robin boundary value problem for linear elliptic nondivergence second-order equations in a neighborhood of the conical point,* J. Diff. Eq. **207,** 2, 303-359 (2004).

[19] M. Borsuk, V. Kondratiev, *Elliptic Boundary Value Problems of Second Order in Piecewise Smooth Domains,* North-Holland Mathematical Library, ELSEVIER, **69**, 531 p. (2006).

[20] T. Carleman, *Sur la theories des equations integrales et ses applications*, Verhandlungen des Internat. Math. Kongr., Zürich., **1,** 138 - 151 (1932).

[21] T. Carleman, *Über das Neumann − Poincaresche problem fur ein Gebiet mit Ecken*, Diss. Upsala, 1916

[22] M. Dobrowolski, *Numerical approximation of elliptic interface and corner problems,* Habschrift, Universität Bonn (1981); Z.A.M. **64,** 270-271 (1984).

[23] M. Dobrowolski, *On quasilinear elliptic equations in domains with boundary points,* J. reine und angew. Math. **384,** 186-195 (1989).

[24] G.I. Eskin *General boundary value problems for equations of principal type in a plane domain with angular points.* Uspekhi Mat. Nauk, bf 18, 3, 241-242 (1963), (in Russian).

[25] G.I. Eskin *Boundary value problems for second order elliptic equations in domains with corners.* Proc. Symp. Pure Math., bf 43, 2, 105-131 (1985).

[26] W. Feller, *Diffusion processes in one dimension,* Trans. Amer. Math. Soc., **77**, 1-30 (1954).

[27] E. I. Galakhov, A. L. Skubachevskii, *On Feller semigroups generated by elliptic operators with integro-differential boudary conditions,* J. Differential Equations, **176**, 315-355 (2001).

[28] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains,* Pitman Advanced Publishing Program, Boston - London - Melbourne (1985).

[29] P.L. Gurevich, Asymptotics of solutions for nonlocal elliptic problems in plane angles, Tr. semin. im. I.G. Petrovskogo, bf 23 (2003); Engilsh transl. in Journal of Mathematical Sciences, **120**, 3, 1295-1312 (2004).

[30] V.A. Kondrat'ev, *Boundary value problems for elliptic equations in conical regions,* Soviet Math. Dokl., **4** (1963).

[31] V.A. Kondrat'ev, *Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points,* Tr. Mosk. Mat. Obs., **16**, 209-292 (1967); English transl.: Trans. Moscow Math. Soc., **16** (1967).

[32] V.A. Kondrat'ev, O.A. Oleinik, *Boundary-value problems for partial differential equations in non-smooth domains,* Russian Math. Surveys **38,** 1-86 (1983).

[33] Ya.B. Lopatinskiy *On the type of singular integral equations.//* Teoret. i Prikl. Math., **2,** 53-57 (1963), (in Russian).

[34] V.G. Maz'ya, *The solvability in of the Dirichlet problem for a region with a smooth irregular boundary,* Vestnik Leningrad. Univ., **19,** 7, 163-165 (1964), (in Russian).

[35] V.G. Maz'ya, *The Neumann problem in regions with nonregular boundaries,* Sibirsk. Math. Z., **9,** 1322-1350 (1968), (in Russian).

[36] J. Moser, *A new proof of de Giorgi's theorem concering the regularity problem for elliptic differential equations,* Comm. Pure Appl. Math. **13,** 457-468 (1960).

[37] J. Moser, *On Harnack's theorem for elliptic differential equations,* Comm. Pure Appl. Math. **14,** 577-591 (1961).

[38] K. Sato, T. Ueno, *Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary,* J. Math. Kyoto Univ., **4**, 529-605 (1965).

[39] A.L. Skubachevskii, *Nonclassical boundary-value problems,* Journal of Mathematical Sciences, I: **155,** 2, 199-334 (2008); II: **166,** 4, 377-561 (2010).

[40] P. Tolksdorf, *On quasilinear boundary value problems in domains with corners,* Nonlinear Analysis **5,** 721-735 (1981).

[41] P. Tolksdorf, *On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points,* Comm. Part. Diff. Equat. **8,** 773-817 (1983).

[42] P. Tolksdorf, *On the behaviour near the boundary of solutions of quasilinear equations,* Analysis **3,** 55-78 (1983).

[43] P. Tolksdorf, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations* , Journal of Diff. Equat. **51,** 1, 126-150 (1984).

[44] P. Tolksdorf, *Invariance properties and special structures near conical boundary points,* Lecture notes in mathematics **1121,** 308-318 (1985).

[45] A. D. Ventsel, *On boundary conditions for multidimensional diffusion processes,* Teor. Veroyatnost. i Primenen., **4**, 172-185 (1959); English transl.: Theory Probab. Appl., **4** (1959).

[46] G.M. Verzhbinsky, V.G. Maz'ya, *Asymptotic behaviour of the solutions of second order elliptic equations near the boundary I,* Siberian Math. J. **12**, 874-899 (1971).

[47] G.M. Verzhbinsky, V.G. Maz'ya, *Asymptotic behaviour of the solutions of second order elliptic equations near the boundary II,* Siberian Math. J. **13**, 858-885 (1972).