Recenzja rozprawy doktorskiej

***„Uogólnione symplektyczne przestrzenie symetryczne"***

Macieja Franciszka Bocheńskiego.

1.Wstęp

Rozprawa dotyczy rozmaitości symplektycznych (dla rozmaitości przyjmiemy w tej recenzji standardowo oznaczenie M), dla których grupa symplektomorfizmów Aut M działa na M tranzytywnie.

Główny wynik pracy to klasyfikacja takich M, przy dodatkowych założeniach, o których za chwilę.

Problematykę tego typu zapoczątkowały pisane około 1920r prace Elie Cartana. Dotyczyły one rozmaitości ze strukturą riemmanowską. Dla każdego punktu x takiej rozmaitości zawsze istnieje (określone lokalnie) odbicie geodezyjne $S_x$ w tym punkcie a założenie Cartana polegało na przyjęciu, że każde $S_x$ rozszerza się do globalnie określonego dyfeomorfizmu, zachowującego strukturę riemmanowską M. Klasa takich rozmaitości (nazywanych odtąd w literaturze przestrzeniami symetrycznymi) dopuszcza pełny opis. Kluczowym krokiem do tego celu była obserwacja, że dla spójnych M grupa Aut M działa na M tranzytywnie i w rezultacie można utożsamić M z przestrzenią ilorazową Aut M / Aut $_{x_0}$ (M), gdzie Aut $_{x_0}$(M) jest grupą stabilną dowolnego ustalonego $x_0 \in M$.

Nie wchodząc w szczegóły techniczne, utożsamienie M z Aut M / Aut $_{x_0}$(M) (gdzie Aut M i Aut $_{x_0}$(M) okazują się być grupami Liego) prowadzi do wcześniej rozpracowanej przez E. Cartana klasyfikacji półprostych algebr Liego i w rezultacie do klasyfikacji przestrzeni symetrycznych.

Piękna ta teoria wywołała zainteresowanie i refleksję, która zaowocowała standaryzacją wypracowanej przez E. Cartana procedury.

Pierwszym jej krokiem jest wyróżnienie klasy badanych rozmaitości poprzez narzucenie warunku, że dla każdego $x \in M$ istnieje globalny dyfeomorfizm $S_x$ rozmaitości M pewnej ustalonej klasy a rodzina $\{S_x\}_{x\in M}$ spełnia pewien układ aksjomatów inspirowany warunkami, jakie spełniają odbicia geodezyjne w przypadku przestrzeni symetrycznych.

Okazało się , że wspólną własnością tych ogólniejszych, niż przestrzenie symetryczne klas jest to, że tworzące daną klasę rozmaitości dopuszczają wtedy koneksję afiniczną zachowywaną przez przekształcenia $S_x$ dla $x \in M$ . Klasy te nazywane są s-strukturami. Szczególnym przypadkiem jest sytuacja, gdy istnieje $k \geq 2$ takie, że $S^k_x = id$. Mówimy wtedy o rozmaitościach k - symetrycznych.

Niniejsza praca zajmuje się klasą przestrzeni 3- symetrycznych, będących dodatkowo rozmaitościami symplektycznymi tak, że $S_x$ są symplektomorfizmami.

Drugim krokiem „uogólnionej procedury Cartana" jest pokazanie, że także w tej uogólnionej sytuacji rodzina $\{S_x\}$ $x \in M$ generuje grupę Aut M działającą (dla spójnych M) tranzytywnie na M. Prowadzi to (podobnie jak w teorii E. Cartana ) do zastąpienia M w dalszych rozważaniach przez przestrzeń ilorazową Aut M / Aut $_{xo}$(M). Dla zmniejszenia grupy Aut M, nie tracąc przy tym jej tranzytywności, można rozpatrzyć jej podgrupę G generowaną przez superpozycję $S_x \cdot S_y$ przy $x,y \in M$. Nazywa się ona grupą transweksji M. Wprowadzając H = G ∩ Aut $_{xo}$(M) uzyskujemy ulepszoną reprezentację M w postaci M = G/H. Zarówno grupa Aut $_{xo}$(M) jak i grupa transwekcji G mają w związku z tą reprezentacją dodatkową strukturę, którą jest automorfizm $\sigma$: Aut (M) $\ni \varphi \rightarrow S_{xo}\, \varphi\, S_{xo} \in$ Aut M.

(W rozpatrywanej pracy automorfizmy $\sigma$ spełniają $\sigma^3 = id$).

Trzeci krok procedury polega na przejściu od grup G i H do odpowiadających im algebr Liego $\mathfrak{J}$ i $\mathfrak{h}$ oraz od $\sigma$: $G \rightarrow G$ do indukowanego automorfizmu $\sigma^\sim: \mathfrak{J} \rightarrow \mathfrak{J}$.

W każdym z kolejnych trzech kroków redukcji pojawiają się pytania o wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość rozpatrywanych przed redukcją i po redukcji struktur.

2. Temat pracy

Omówione powyżej trzy kolejne redukcje sprowadzają geometryczny problem klasyfikacji wybranej klasy rozmaitości do problemu algebraicznego – opisu powstającej po trzecim etapie klasy algebr Liego. Ponieważ dobór założeń gwarantujących wzajemną jednoznaczność kolejnych redukcji jest często niemożliwy a końcowa klasyfikacja wymaga półprostości lub przynajmniej reduktywności rozpatrywanej algebry $\mathfrak{J}$ w sposób nieco sztuczny definiuje się badaną klasę rozmaitości jako taką, dla której końcowa redukcja doprowadza do algebr półprostych (reduktywnych).

W sytuacji omawianej w pracy, klasą badanych rozmaitości są przestrzenie 3- symetryczne dopuszczające 2-formę symplektyczną, zgodną z podstawową s-strukturą. Przechodząc przez kolejne redukcje problem klasyfikacji takich spójnych i jednospójnych rozmaitości doprowadza do klasyfikacji prostych algebr Liego, dopuszczających automorfizm $\sigma$, taki że $\sigma^3$=id. Wtedy dana algebra $\mathfrak{J}$ rozkłada się na sumę prostą swoich podprzestrzeni.

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m} \tag{1}$$

gdzie $\mathfrak{h}$ jest podalgebrą $\mathfrak{J}$ a $\mathfrak{m}$ jej przestrzenią liniową $\mathfrak{J}$ oraz $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$.
Istnienie struktury symplektycznej na M zgodnej z jej podstawową s-strukturą oznacza, że na $\mathfrak{J}$ musi istnieć antysymetryczna ad-niezmiennicza forma 2-liniowa $\Omega$, której ograniczenie do $\mathfrak{m}$ jest nieosobliwe.
Rozpatrywana sytuacja jest niejako „umieszczona pomiędzy" dwiema istniejącymi teoriami. Pierwsza z nich zapoczątkowana przez pracę doktorską P. Bielavsky'ego z 1994r dotyczy symplektycznych przestrzeni 2- symetrycznych (bez ograniczenia się do półprostych $\mathfrak{J}$) a druga zawarta w monumentalnej pracy A. Gray'a i J.A. Wolfa z 1968r dotyczy s-struktur rzędu 3 z półprostą algebrą $\mathfrak{J}$.

3. Zawartość pracy.

Zadaniem autora recenzowanej pracy było więc stwierdzenie, które z podanych w klasyfikacji A. Gray'a i J.A. Wolfa przykładów dopuszczają dodatkowo strukturę symplektyczną zgodną z podstawową s-strukturą.

Nieocenioną pomocą jest tu, pochodzące od Bielavsky'ego, kryterium wiążące istnienie takiej struktury symplektycznej $\Omega$ z obecnością elementu Z w centrum algebry $h$ w rozkładzie (1), takiego, że $ad_Z$ ograniczony do $\mathfrak{m}$ jest izomorfizmem.

Analiza przypadków podanych w pracy A. Gray'a i J.A. Wolfa nie jest łatwa. Polega ona na powiązaniu części z nich (gdzie grupa G w reprezentacji M=G/H jest zwarta) z pozostałymi przypadkami za pomocą relacji typu dualności.
Przypadki "zwarte" dopuszczają szybkie rozstrzygnięcia, pozytywne w jednym z nich, dzięki twierdzeniu z tej samej pracy gwarantującemu wtedy istnienie struktury kachlerowskiej oraz negatywne w dwóch pozostałych przypadkach dzięki kryterium Bielavsky'ego. Pozostałe przypadki „niezwarte" wymagają subtelnej analizy algebraicznej umożliwiającej ostatecznie użycie kryterium Bielavsky'ego.

Dokonana w ten sposób analiza klasyfikacji Gray'a - Wolfa daje bardzo dobre świadectwo zdolnościom i talentowi autora. Jej wynik, choć mało czytelny dla niespecjalistów, będzie z pewnością odnotowany i używany.

Po tej pochwale kilka słów krytyki. Praca jest bardzo źle napisana. Zawiera dużo pomyłek, drobnych błędów i niekonsekwencji. Szczegółowe ich omówienie przeznaczone dla autora załączam osobno.

W konkluzji stwierdzam, że gdyby nie formalne niedostatki, praca z pewnością zasługiwałaby na wyróżnienie.

Sprawę uznania jej za wyróżniającą pozostawiam Radzie Wydziału.

Warszawa, 19.XII.2013

Wojciech Wojtyński