Piotr Pragacz
profesor
Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa

Recenzja rozprawy doktorskiej

magister Edyty Bartnickiej

Pani magister Edyta Bartnicka jest doktorantką Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie. Jej rozprawa doktorska nosi tytuł :

„Prosta rzutowa nad pierścieniem skończonym łącznym z jedynką". Rozprawa została napisana pod kierunkiem dr hab. Andrzeja Matrasia.

Zespolona prosta rzutowa i ogólniej prosta rzutowa nad ciałem algebraicznie domkniętym jest podstawowym obiektem geometrii algebraicznej. Badanie prostych rzutowych nad pierścieniami jest ważnym działem geometrii. Benz w swojej klasycznej monografii [5] opisał geometrie Möbiusa, Laguerre'a i Minkowskiego jako geometrie prostych rzutowych nad pierścieniami będącymi rozszerzeniami ciała do algebry wymiaru 2. Badania te kontynuowali Blunck i Herzer [15], a także Blunck i Havlicek ([9],[10],[13]) oraz inni.

W rozprawie przyjmuje się wprowadzoną przez Herzera w [30] definicję prostej rzutowej $\mathbb{P}(R)$ nad pierścieniem R jako zbioru wszystkich wolnych podmodułów cyklicznych lewostronnego wolnego modułu rangi 2 nad R, ${}^2R$, które mają wolne uzupełnienie cykliczne w ${}^2R$. Takie podejście prowadzi do sytuacji, w której jeden podmoduł cykliczny może istotnie zawierać się w innym. Posiłkując się pracą Bluncka i Havlicka [11], autorka w rozdziale 2 dyskutuje warunek uniknięcia tej sytuacji i pokazuje, że żaden punkt prostej rzutowej $\mathbb{P}(R)$ nie zawiera się właściwie w innym punkcie $\mathbb{P}(R)$, gdy pierścień R jest pierścieniem Dedekind – finite (Df)(por. 1.3.4).

W rozdziale 2.1, który ma charakter pomocniczy, zebrany jest szereg rezultatów o pierścieniach Df, parach dopuszczalnych, parach unimodularnych. Opisane są też proste rzutowe $\mathbb{P}(R)$ w przypadku, gdy pierścień R jest algebrą wymiaru 2 nad ciałem.

W rozdziale 2.2 badane są relacje na zbiorze punktów prostej rzutowej nad pierścieniami Df, ze szczególnym uwzględnieniem relacji połączalności, równoległości i przylegania.

W rozdziale 2.3, autorka odwołuje się do geometrii łańcuchów.
W przypadku rozszerzeń pierścieniowych stopnia 2 dowolnego ciała K otrzymujemy geometrie Möbiusa, Laguerre'a i Minkowskiego. Odpowiadające im algebry to ciało oraz pierścienie $K[X]/X^2$ i $K[X]/(X^2 - X)$. W przypadku rozszerzeń ciała $\mathbb{R}$ stopnia 3 otrzymuje się 5 geometrii.

Metoda badawcza przyjęta w rozprawie polega na badaniu odpowiednich grafów.

W rozdziale 3 autorka studiuje graf połączalności punktów prostej rzutowej $\mathbb{P}(R)$: jest to nieskierowany graf bez pętli, którego wierzchołkami są punkty $\mathbb{P}(R)$, a krawędzie tworzone są przez pary punktów połączalnych; oznaczamy go przez $G(R, \Delta)$ zamiast $G(\mathbb{P}(R), \Delta)$. Studiowanie własności tego grafu jest jednym z głównych celów rozprawy.
Dokładniej w rozdziale 4. bada się graf połączalności punktów prostej rzutowej nad pierścieniem skończonym. Narzędziem badania grafów są kliki.
Klika w grafie nieskierowanym to zbiór wzajemnie sąsiadujących wierzchołków tego grafu. Jeżeli do kliki nie można dodać wierzchołka, tak by razem z nią także tworzył klikę, to nazywamy ją maksymalną. Rozmiar największej kliki oznacza się $\omega(G(V, \Delta))$.

Niech J będzie radykałem Jacobsona pierścienia R i niech Δ_J oznacza relację połączalności na prostej rzutowej $\mathbb{P}(\bar{R})$ $(\bar{R} = R/J)$. Wówczas użyteczny Lemat 3.4 orzeka, że zbiór wierzchołków grafu $G(\bar{R}, \Delta_J)$ posiada rozkład na sumę m wierzchołkowo rozłącznych klik maksymalnych wtedy i tylko wtedy gdy zbiór wierzchołków grafu $G(R, \Delta)$ posiada rozkład na sumę $m|J|$ wierzchołkowo rozłącznych klik maksymalnych. Ponadto $\omega(G(\bar{R}, \Delta_J)) = \omega(G(\bar{R}, \Delta))$. Niech R będzie skończonym pierścieniem lokalnym o radykale Jacobsona J. W Twierdzeniu 4.1 pokazuje się, że zbiór wierzchołków grafu $G(R, \Delta)$ posiada rozkład na sumę $|J|$ wierzchołkowo rozłącznych klik maksymalnych, których rozmiar wynosi $|\bar{R}| + 1$.

Zacytowany wyżej lemat 3.4 wraz z Lematem 4.2 opisującym wierzchołki produktu tensorowego grafów pozwala dowieść ważne Twierdzenie 4.3:

Niech R będzie pierścieniem skończonym z radykałem Jacobsona J, takim, że R/J jest izomorficzny z $R_1 \times \ldots \times R_n$ i niech zbiór wierzchołków

$V(G(R_i,\Delta_i))$, gdzie Δ_i oznacza relację dołączalności na $\mathbb{P}(R_i)$, będzie sumą m_i wierzchołkowo rozłącznych klik maksymalnych K_i, takich, że $|K_i| = s_i$, $i = 1, \dots, n$. Niech $min\{s_i\} = s$. Wówczas zbiór wierzchołków grafu $G(R,\Delta)$ jest sumą $\frac{(m_1 \cdot \dots \cdot m_n)(s_1 \cdot \dots \cdot s_n)|J|}{s}$ wierzchołkowo rozłącznych klik maksymalnych, takich, że $\omega(G(R,\Delta)) = s$.

Jako ciekawe wnioski otrzymujemy:

1. Niech R będzie pierścieniem skończonym, takim, że $\bar{R}$ jest izomorficzny z produktem prostym n kopii $F(q)$. Wówczas zbiór wierzchołków $G(R,\Delta)$ jest sumą $(q+1)^{n-1}|J|$ wierzchołkowo rozłącznych klik maksymalnych takich, że $\omega\big(G(R,\Delta)\big) = q+1$.
2. Zbiór wierzchołków grafu połączalności punktów prostej rzutowej nad pierścieniem macierzy dolno trójkątnych $n \times n$ nad $F(q)$ jest sumą $(q+1)^{n-1}\, q^{\frac{n^2-n}{2}}$ wierzchołkowo rozłącznych klik maksymalnych rozmiaru $q + 1$.

Podobnymi metodami autorka uzyskuje opis automorfizmów grafu $G(R,\Delta)$. Na przykład: $|Aut(G(F(q),\Delta)| = (q+1)!$.
Autorka bada także graf połączalności punktów prostej rzutowej nad $M_n(q)$. Opierając się na rezultatach Bentelsprachera oraz Dennistona pokazuje, że $G(M_2(q),\Delta)$ jest sumą q^2+q+1 wierzchołkowo rozłącznych klik maksymalnych oraz $\omega\big(G(M_2(q),\Delta)\big) = q^2+1$. Autorka przedstawia klasyfikację grafów $G(R,\Delta)$ gdzie R jest nierozkładalnym pierścieniem rzędu p^n dla dowolnej liczby pierwszej p i każdej liczby naturalnej $n \leqslant 5$.
I tak, jeśli $|R| = p$, to mamy graf pełny $G(R,\Delta)$ rzędu $p+1$. Jeśli R jest rzędu p^2 to mamy dwie możliwości:

1. $G(R,\Delta)$ jest grafem pełnym rzędu p^2+1 ,
2. $V\big(G(R,\Delta)\big)$ jest sumą p wierzchołkowo rozłącznych klik maksymalnych $(p+1)$ – elementowych.

W przypadku $|R| = p^3$ istnieją 3 nieizomorficzne grafy $G(R,\Delta)$, w przypadku $|R| = p^4$ istnieje 5 takich grafów, a w przypadku $|R| = p^5$ istnieje dokładnie 6 takich grafów (patrz Twierdzenie 4.8, Lemat 4.9 i Twierdzenie 4.10).

Głównym narzędziem rozdziału 5. Są pary oddalone. Są to pary, które nie należą do żadnego wolnego podmodułu cyklicznego generowanego przez parę unimodularną. Autorka zajmuje się wolnymi podmodułami cyklicznymi, a zwłaszcza tymi generowanymi przez pary oddalone. Podanych jest kilka przykładów pierścieni, dla których istnieją pary oddalone generujące wolne podmoduły cykliczne oraz nie posiadające tej własności. W Twierdzeniu 5.4 bada się działanie pełnej grupy liniowej nad pierścieniem macierzy dolnotrójkątnych 3×3 o współczynnikach z ciała. Dowodzi się, że istnieje 5 orbit wolnych podmodułów cyklicznych, przy czym 4 z nich są zbiorami wolnych podmodułów cyklicznych generowanych przez pary oddalone.

Do listy pierścieni, dla których wszystkie wolne podmoduły cykliczne tworzą prostą rzutową autorka dorzuca pierścienie półproste (Stwierdzenie 5.7) oraz skończone pierścienie przemienne (Wniosek 5.10).

Autorka dowodzi, że opis pierścieni skończonych, dla których istnieją pary oddalone generujące wolne podmoduły cykliczne sprowadza się do opisu pierścieni nierozkładalnych, których rzędy są potęgami liczb pierwszych.
W Stwierdzeniu 5.11 podana jest klasyfikacja nierozkładalnych pierścieni rzędu p^n, gdzie $n \leqslant 4$, dla których istnieją wolne podmoduły cykliczne generowane przez pary odbalone.

Recenzowana rozprawa doktorska zawiera szereg rezultatów poszerzających naszą wiedzę o prostej rzutowej nad pierścieniami, ze szczególnym uwzględnieniem pierścieni skończonych. Na wyróżnienie zasługują: Twierdzenie 4.1, Twierdzenie 4.3, Twierdzenie 4.8, Twierdzenie 4.10, Twierdzenie 5.4, Stwierdzenie 5.7, Wniosek 5.10, Stwierdzenie 5.11. Autorka umiejętnie bada graf połączalności punktów prostej rzutowej nad różnymi pierścieniami, uzyskując wartościowe rezultaty. Wykazuje się ona także dobrą znajomością literatury w tej dziedzinie. Wiele wyników zostało już opublikowanych w [3] i [2]. Praca jest zredagowana bardzo starannie. (Uwaga: na ostatniej stronie Wstępu, zamiast „Twierdzenie 5.2” powinno być: „Wniosek 5.10”.

Uważam, że rozprawa doktorska Pani magister Edyty Bartnickiej spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane tego typu rozprawie i wnoszę o dopuszczenie jej autorki do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Warszawa 14.11.2017 Piotr Pragacz