Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr. Piotra Jastrzębskiego
"Formy Clifforda-Kleina pewnych przestrzeni jednorodnych"
przedstawionej
Radzie Wydziału Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie

1. Tematyka rozprawy

Ponieważ rozprawa ma bardzo techniczny charakter, nawet streszczenie i wstęp są bardzo trudno czytelne dla matematyka spoza wąskiego kręgu specjalistów, przedstawię możliwie najprościej kontekst i tematykę rozprawy.

Rozprawa dotyczy grup Lie, czyli rozmaitości gładkich z zadanym działaniem grupowym będącym przekształceniem gładkim. Typowymi i bardzo ważnymi przykładami są grupy macierzy odwracalnych $GL(n, \mathbb{F})$ nad różnymi ciałami $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ (traktowane jako podzbiory otwarte przestrzeni kartezjańskich $\mathbb{F}^{n^2}$) oraz ich domknięte podgrupy. "Najmniejszą" nieabelową taką grupą jest rozważana w pracy grupa $SL(2, \mathbb{R})$ składająca się z rzeczywistych macierzy 2×2 o wyznaczniku równym 1. Jest to rozmaitość 3-wymiarowa. Maksymalną zwartą podgrupą w grupie $SL(2, \mathbb{R})$ jest grupa obrotów płaszczyzny $SO(2) \subset SL(2, \mathbb{R})$, izomorficzna z okręgiem jednostkowym na płaszczyźnie zespolnej $S^1 \subset \mathbb{C}$.

Podstawowym narzędziem badania spójnych grup Lie są ich algebry Lie. Jeśli G jest grupą Lie, to jej algebrą Lie $L(G) := (TG_e, [-,-])$ nazywamy przestrzeń styczną w elemencie neutralnym TG_e, wyposażoną w antysymetryczne działanie $[-,-]\colon TG_e \times TG_e \to TG_e$, zwane nawiasem Lie, zdefiniowane poprzez komutator pól wektorowych. W przypadku grupy liniowej $GL(n, \mathbb{R})$ przestrzeń styczna to oczywiście przestrzeń wszystkich macierzy $n \times n$, a nawias Lie to komutator macierzy $[A, B] = AB - BA$. Zwyczajowo algebrę Lie grupy Lie G oznaczamy małą gotycką literą $\mathfrak{g}$. Algebra Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ grupy $SL(2, \mathbb{R})$ ma łatwą do opisania postać: jej bazą jako przestrzeni wektorowej są trzy macierze E, F, H a nawias Lie jest zadany przez równości: $[H, E] = 2E$, $[H, F] = -2F$, $[E, F,] = H$. Fundamentalny związek grup i algebr Lie opisuje następujące klasyczne twierdzenie:

Twierdzenie 0.1. *Każda skończenie wymiarowa algebra Lie (nad ciałem liczb rzeczywistych) jest algebrą Lie pewnej jednospójnej grupy Lie. Jeśli $\phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ jest homomorfizmem algebr Lie jednospójnej grupy G i grupy H, to istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup Lie $f\colon G \to H$ taki, że $Df_e = \phi$.*

Mając grupę Lie G i jej domkniętą podgrupę $H \subset G$ przestrzenią jednorodną nazywa się zbiór (prawych) warstw podgrupy H w G, oznaczany G/H. Jest to oczywiście przestrzeń topologiczna z topologią ilorazową, ale także rozmaitość gładka. Odwzorowanie ilorazowe $p\colon G \to G/H$ jest submersją. Jeśli podgrupa H jest zbiorem punktów stałych pewnego homomorfizmu $\sigma\colon G \to G$ takiego, że $\sigma^2 = id$ to G/H nazywa się przestrzenią symetryczną.

Rozmaitość G/H jest wyposażona w gładkie działanie grupy G przez przesunięcia z lewej strony: $G \times G/H \ni (g_1, g_2H) \rightsquigarrow (g_1g_2)H \in G/H$. To działanie można ograniczać do podgrup $\Gamma \subset G$, otrzymując w ten sposób ciekawe symetrie rozmaitości G/H. Mając w pamięci Tw. 0.1 nie jest zaskakujące, że przestrzenie jednorodne można badać rozpatrując pary algebr Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

W Rozprawie przez działanie grupy $SL(2, \mathbb{R})$ na przestrzeni jednorodnej G/H rozumie się zanurzenie $SL(2, \mathbb{R}) \to G$ oraz działanie przez przesunięcia obrazu na G/H. Na pytanie o istnienie zanurzenia $SL(2,\mathbb{R}) \to G$ można odpowiadać korzystając z Twierdzenia 0.1, zachowując jednak pewną ostrożność bowiem grupa $SL(2,\mathbb{R})$ nie jest jednospójna (jej grupa podstawowa jest izomorficzna z grupą liczb całkowitych). Rozprawa dotyczy pewnej specjalnej klasy zanurzeń, a mianowicie, przy ustalonej podgrupie $H \subset G$, dających działanie właściwe $SL(2,\mathbb{R})$ na przestrzeni jednorodnej G/H. Przypomnimy Definicję 2.9 z Rozprawy:

Definicja 0.1. Działanie grupy topologicznej G na przestrzeni topologicznej X nazywamy *właściwym* jeśli dla dowolnego podzbioru zwartego $S \subset X$ podzbiór $\{g \in G \mid (gS) \cap S \neq \emptyset\}$ jest zwarty.

Zauważmy, że grupy izotropii działania właściwego są zwarte. Przypomnijmy, że dowolna spójna grupa Lie posiada maksymalną podgrupę zwartą i dowolne dwie są sprzężone (Tw. Cartana–Iwasawy–Malceva). Zatem dowolna zwarta podgrupa izotropii musi być podgrupą pewnej maksymalnej podgrupy zwartej. Co więcej, maksymalna podgrupa zwarta może być znaleziona przy pomocy własności algebry Lie całej grupy poprzez wskazanie podalgebry stycznej do tej podgrupy. Nie wchodząc w szczegóły techniczne, poszukiwanie właściwych działań $SL(2,\mathbb{R})$ na G/H może być sprowadzone dla szerokiej klasy grup do wskazania w algebrze Lie $\mathfrak{g}$ podalgebry izomorficznej z algebrą $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ i sprawdzenia, czy jest ona odpowiednio położona względem podalgebry $\mathfrak{h}$. Dla pewnej szerokiej klasy grup Lie i pewnych ich podgrup Toshiyuki Kobayashi sformułował w terminach wzajemnego położenia algebr Lie podgrup $L, H \subset G$ w algebrze Lie grupy G kryterium , aby działanie przez przesunięcia podgrupy L na G/H było właściwe (Tw. 3.1 Rozprawy). W celu sformułowania tego twierdzenia musimy przytoczyć jeszcze kilka konstrukcji z teorii grup i algebr Lie.

Przypomnijmy, że algebra Lie $\mathfrak{g}$ nad ciałem $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ nazywa się półprosta jeśli dwuliniowa forma (zwana formą Killinga) $B\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{F}$ zadana wzorem $B(X,Y) := \mathrm{Tr}(ad_X ad_Y)$ jest niezdegenerowana. Ważne twierdzenie teorii grup Lie powiada, że dowolna rzeczywista półprosta algebra Lie $\mathfrak{g}$ posiada inwolutywny automorfizm (tzw. inwolucję Cartana) $\theta\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ taką, że forma $B_\theta(X,Y) := -B(X,\theta(Y))$ jest symetryczna i dodatnio określona. Inwolucja ta zadaje rozkład $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ na sumę prostą podprzestrzeni własnych odpowiadających wartościom własnym 1 i -1. Jeśli $\mathfrak{g}$ jest algebrą Lie grupy G, to podalgebra $\mathfrak{k}$ jest styczna do maksymalnej zwartej podgrupy $K \subset G$. Przez maksymalną rozszczepialną podalgebrę Cartana w $\mathfrak{g}$ będziemy rozumieć maksymalną abelową podalgebrę $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ lub dowolną podalgebrę w $\mathfrak{g}$ z nią sprzężoną (Uwaga: definicja w Rozprawie jest nieco inna!).

Theorem 0.1 (T. Kobayashi [13])**.** *Niech H_1, H_2 będą reduktywnymi podgrupami w rzeczywistej reduktywnej grupie liniowej G. Niech $\mathfrak{a}$ oraz $\mathfrak{a}(H_i)$, $i = 1,2$ będą odpowiednio maksymalnymi rozszczepialnymi abelowymi podalgebrami w $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ i załóżmy, że $\mathfrak{a}(H_i) \subset \mathfrak{a}$, $i = 1,2$. Niech $K \subset G$ będzie maksymalną podgrupą zwartą oraz $W(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) := N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a})$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

1. *H_1 działa właściwie na G/H_2;*
2. *H_2 działa właściwie na G/H_1;*
3. *Dla każdego elementu $w \in W(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$, $w\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 = \emptyset$.*

Warunek 3. z twierdzenie Kobayashi został zastosowany przez Takayuki Okuda [18] do opisu właściwych działań $H_1 = SL(2,\mathbb{R})$ na w przypadku gdy G jest spójną, liniową grupą Lie, a $H_2 \subset G$ jest podgrupą otwartą w zbiorze punktów stałych pewnego inwolutywnego automorfizmu $\sigma\colon G \to G$ (w szczególności przestrzeniach symetrycznych).

Do identyfikacji podgrup grupy G izomorficznych z grupą $SL(2,\mathbb{R})$ zarówno w pracy Okudy jak i Rozprawie służy ważne twierdzenie Jacobsona–Morozova. W celu jego sformułowania rozważmy działanie dołączone grupy Lie G na jej algebrze $\mathfrak{g}$: $Ad\colon G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, zdefinowane przez pochodną automorfizmów wewnętrznych. Orbitę nilpotentnego elementu algebry $\mathfrak{g}$ nazywamy orbitą nilpotentną.

Theorem 0.2 (Jacobson–Morozov). *Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Lie. Wtedy dla dowolnego elementu nilpotentnego $E' \in \mathfrak{g}$ istnieje homomorfizm algebr Lie $\phi\colon sl(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}$ taki, że $\phi(E) = E'$, przy czym dowolne dwa takie homomorfzimy są sprzężone przez element z centralizatora $Z_G(E)$ elementu E w grupie Lie G odpowiadającej algebrze $\mathfrak{g}$.*

Korzystając z Tw. 0.1 oraz klasyfikacji nakryć nad $SL(2,\mathbb{R})$ otrzymuje się następujący wniosek:

Wniosek 0.1. *Niech G będzie liniową, półprostą grupą Lie. Wtedy dla dowolnego niezerowego elementu nilpotentnego $E' \in \mathfrak{g}$ istnieje zanurzenie $\phi\colon SL(2,\mathbb{R}) \to G$ taki, że $D\phi_{id}(E) = E'$, przy czym jeśli dwa elementy nilpotentne należą do tej samej G–orbity to odpowiadające im homomorfizmy są sprzężone.*

W specjalistycznej literaturze często zamiast o homomorfizmach $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}$ mówi się o $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-trójkach elementów, czyli obrazach generatorów $\{E, F, H\}$ w $\mathfrak{g}$ spełniających odpowiednie relacje.

2. Oryginalne wyniki Rozprawy

Bardzo ważną rolę w sformułowaniu głównych wyników odgrywają dwa niezmienniki liczbowe rzeczywistej algebry Lie: rząd rzeczywisty $rank_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ oraz rząd hiperboliczny $rank_{a-hyp}(\mathfrak{g})$, zdefiniowany w pracy Bocheńskiego i Tralle [3]. Ścisłe definicje rzędów są wysoce techniczne, więc jedynie je tutaj naszkicujemy. Definicja odwołuje się do kompleksyfikacji $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ algebry $\mathfrak{g}$ oraz układów pierwiastkowych tej algebry. Przy ich pomocy definiujemy pewien stożek $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$, gdzie $\mathfrak{a}$ jest jak poprzednio maksymalną przemienną podalgebrą w składniku rozkładu Cartana $\mathfrak{p}$. Wymiar liniowy tego stożka nazywamy rzędem rzeczywistym algebry $\mathfrak{g}$. Wybierając odpowiedni element w grupie Weyla $W(\mathfrak{g})$ definiuje się pewną inwolucję $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$, która zachowuje stożek $\mathfrak{a}^+$. Zbiór jej punktów stałych na $\mathfrak{a}^+$ też jest stożkiem, oznaczanym $\mathfrak{b}^+$, zwanym stożkiem Benoist. Jego wymiar liniowy to rząd a-hiperboliczny $rank_{a-hyp}(\mathfrak{g})$. Oczywiście zachodzi nierówność $rank_{a-hyp}(\mathfrak{g}) \leqslant rank_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$. Stożek Benoist może być opisany w terminach orbit dołączonego działania grupy G:

Theorem 0.3 (T. Okuda). *Niech $\mathfrak{g}$ będzie rzeczywistą półprostą algebrą Lie, grupy Lie G. Przyporządkowanie elementowi $X \in \mathfrak{g}$ jego G-orbity dołączonej $Ad_G X$ wyznacza bijekcję między punktami stożka Benoist $\mathfrak{b}^+$ a zbiorem antypodalnych G–orbit hiperbolicznych tzn. takich, że operator ad_X jest diagonalizowalny nad $\mathbb{R}$ oraz jeśli wraz z dowolnym elementem Y do orbity należy także $-Y$.*

Mając na uwadze Tw. 0.2 będą nas szczególnie interesować orbity elementów nilpotentnych. Ich klasyfikacja jest tematem książki [5].

Opisaną pokrótce maszynerię autor używa do udzielenia odpowiedzi na postawione na początku pytanie o istnienie właściwych działań grupy $SL(2,\mathbb{R})$ na pewnych przestrzeniach jednorodnych. Główny rezultat Rozprawy sformułowano we Wstępie jako Twierdzenie 1.1.

Theorem 0.4 (Tw. 1.1 Rozprawy). *Niech G będzie spójną, prostą liniową niezwartą grupą Lie a $H \subset G$ jej domkniętą, spójną podgrupą o zwartym centrum taką, że para algebr $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ jest reduktywna (w szczególności jesli są one półproste i istnieje inwolucja Cartana zachowująca $\mathfrak{h}$) oraz $rank_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h}) = 1$. Przestrzeń jednorodna G/H posiada właściwe działanie grupy $SL(2, \mathbb{R})$ wtedy i tylko wtedy gdy $rank_{a-hyp}(\mathfrak{h}) \geqslant 2$.*

Dowód twierdzenia opiera się na wynikach Bocheńskiego-Tralle, T. Kobayashi oraz Okudy, a także lemacie udowodnionym w Rozprawie:

Lemat 0.1. *Niech G będzie prostą liniową grupą Lie. Istnieją $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-trójki $\{H_i, E_i, F_i\}$ takie, że $Span_{\mathbb{R}}(\mathfrak{b}^+) = Span_{\mathbb{R}}\{B_i \,|\, B_i$ odpowiada orbicie elementu $H_i\}$.*

Dowód lematu opiera się na klasyfikacji prostych algebr Lie i znalezieniu w każdym przypadku odpowiednich $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-trójek.

Z Tw. 1.1 Rozprawy wyprowadzono Wniosek 1.1 opisujący dokładniej przestrzenie jednorodne spełniające założenia tego twierdzenia, które nie posiadają właściwego działania grupy $SL(2, \mathbb{R})$.

Pozostałe dwa główne twierdzenia wymienione we Wstępie mają jeszcze bardziej techniczny charakter. Podają warunki dostateczne na to, aby przestrzeń jednorodna posiadała właściwe działanie grupy $SL(2, \mathbb{R})$ w terminach diagramów Dynkina, diagramów Satake oraz własności systemów pierwiastków.

Rozprawa dotyczy aktualnej tematyki, mającej wiele odniesień do ważnych kierunków badań współczesnej matematyki i fizyki. Wyniki Rozprawy uważam za interesujące, aczkolwiek bardzo techniczne, trudne do intuicyjnego przedstawienia. Rozprawa bardzo silnie opiera się na niedawnych wynikach wielu autorów badających symetrie przestrzeni jednorodnych; szczególnie T. Kobayashi i T. Okudy oraz Y. Benoist, opublikowanych w najpoważniejszych czasopismach matematycznych. Wkład Autora polega na zebraniu tych rezultatów oraz przeprowadzeniu wielu żmudnych analiz i obliczeń w opisanych *explicite* w klasycznej literaturze prostych algebrach Lie.

2. Redakcja Rozprawy

Prezentacja podstaw teoretycznych wyników Rozprawy, a także głównych rezultatów pozostaje daleko w tyle za wagą jej tematyki. Redakcja Rozprawy, nawet już jej Wstępu, praktycznie zamyka dostęp do niej matematykowi, który nie śledził na bieżąco choćby literatury wymienionej w bibliografii. Przy lekturze Rozprawy odnosiłem wrażenie, że Autor skupiając się na szczegółowych obliczeniach, traktował podstawowe wyniki teoretyczne jak "czarne skrzynki" nie próbując dokładnie zrozumieć treści ich zwartości. Wrażenie to potwierdziła rozmowa z Autorem. Poniżej podam tylko kilka przykładów punktów prowadzących do konfuzji:

Definicja działania grupy Autor przytoczył dość niezręczną definicję działania grupy na przestrzeni topologicznej (Definicja 2.9), dosłownie przetłumaczoną z pracy [13]. Nie wspomniał jednak nigdzie *explicite*, że działania które w Rozprawie są rozważane są bardzo szczególnego typu, a mianowicie działania przez lewe przesunięcia na przestrzeni G/H zadane przez zanurzenie $SL(2, \mathbb{R}) \to G$. Ten problem dotyczy nie tylko działań $SL(2, \mathbb{R})$; np. w Tw. 4.1 choć mówi się o "wszystkich grupach działających w sposób właściwie nieciągły i wolny" na G/H chodzi oczywiście tylko o podgrupy w G i działania przez przesunięcia.

Grupa $SL(2,\mathbb{R})$ i jej algebra Lie Jest zdumiewające, że w Rozprawie poświęconej działaniom grupy $SL(2,\mathbb{R})$ poprzez badanie homomorfizmów jej algebry Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ w algebry Lie innych grup zabrakło definicji i podstawowych faktów o $SL(2,\mathbb{R})$ i $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Kluczowe dla Rozprawy $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-trójki pojawiają się w oderwaniu od grupy $SL(2,\mathbb{R})$ i w Rozdziale 5 bez słowa uzasadnienia Autor twierdzi, że dla dowolnej $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-trójki istnieje homomorfizm grup $\Phi\colon SL(2,\mathbb{R}) \to G$ o zadanych wartościach pochodnej na pewnych macierzach, bez powołania się na głębokie Twierdzenie 0.1, ani komentarza dlaczego można je zastosować, mimo że grupa $SL(2,\mathbb{R})$ nie jest jednospójna.

Układy pierwiastkowe Układy pierwiastkowe algebr Lie oraz odpowiadające im diagramy Dynkina i Satake odgrywają bardzo ważną rolę w Rozprawie. W Rozdziale 2.2 Rozprawy podano definicje pierwiastków zespolonej algebry Lie $\mathfrak{g}$ jako pewnych form zespolonych określonych na jej podalgebrze Cartana. Na następnej stronie (str.13) podano definicję abstrakcyjnego układu pierwiastków w rzeczywistej przestrzeni euklidesowej. Zabrakło jednak wyjaśnienia powiązania między tymi pojęciami - nie wiadomo w jaki sposób algebrze Lie przypisać system pierwiastków w sensie Definicji 2.10. Na str. 14 Autor twierdzi, że *"Pokazaliśmy już, że każdej półprostej algebrze Liego odpowiada układ pierwiastkowy."*, co jest nieprawdą, bo dla algebry Lie nie został zdefiniowany układ pierwiastkowy w sensie Definicji 2.10. Rozważania o pierwiastkach dodatnich na str. 14 są zupełnie oderwane. Z kolejnego akapitu można wnioskować, że diagramy Dynkina definiuje się jedynie dla układów pierwiastkowych w uporządkowanych przestrzeniach liniowych, co jest nieprawdą. Bardzo ważna kwestia wyróżniania wśród pierwiastków algebry Lie pierwiastków prostych i dodatnich została zupełnie pominięta, choć następnie się z nich korzysta. Związek diagramów Dynkina z algebrami Liego został skwitowany jednym, nieprecyzyjnym komentarzem, bez odsyłacza do literatury: *"Wiadomo, że układ pierwiastkowy określa półprostą algebrę Liego jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Zatem, klasyfikacja diagramów Dynkina jest też klasyfikacją zespolonych półprostych algebr Liego."* Zważywszy rolę jaką w Rozprawie odgrywają diagramy Dynkina oraz, w przypadku rzeczywistych algebr Lie, diagramy Satake, brak szczegółowego opisu tych relacji jest bardzo poważnym zaniedbaniem.

Zamęt założeń. W różnych miejscach pracy czyni się różne założenia o grupie G, nie wyjaśniając relacji między nimi. Często założenia są rozbite między tekst poprzedzający twierdzenie a samą treść twierdzenia (np. Tw. 1.1). Założenia czynione o grupie lub jej algebrze Lie bywają w różnych miejscach następujące: półprosta, reduktywna, prosta, absolutnie prosta, liniowa, niezwarta, spójna itp. Definicje są rozrzucone w tekście, chociaż powinny być zgromadzone w Rozdziale 2. W Rozdziale 3.1 przyjmuje się bez komentarza istnieje automorfizmów Cartana dla grup reduktywnych, a nawet par (G, H). Czasem z kolei nie jest jasne, czy założenia są rzeczywiście potrzebne. Np. w Rozdziale 4.1 niepotrzebnie zakłada się, że G jest grupą prostą, podczas gdy rząd rzeczywisty jest zdefiniowany dla grup półprostych. We Wstępie jest mowa o "zwartej, reduktywnej grupie Lie", podczas gdy każda zwarta grupa Lie jest reduktywna. Nb. warto byłoby skomentować, czy główne Tw. 1.1 zachodzi dla grup półprostych i podać przykład, że założenie liniowości jest konieczne.

W Rozprawie występuje wiele nieobjaśnionych oznaczeń np. wspomnianych we Wstępie grup i algebr Lie.

Twierdzenie Jacobsona - Morozova Zacytowane w recenzji twierdzenie Jacobsona - Morozova Tw. 0.2. ma fundamentalne znaczenie dla głównych wyników rozprawy. Tymczasem zostało tylko wspomniane na początku Rozdziału 6, bez dokładnego sformułowania a nawet odsyłacza.

Zamęt odsyłaczy. Na początku wielu podrozdziałów występuje uwaga "Ten podrozdział został oparty na [..]" , natomiast brak odsyłaczy do konkretnych miejsc, nawet w przypadku obszernych prac i grubych książek. Nie zawsze odsyłacze są precyzyjne np. w sprawie podstaw teorii grup i algebr Lie w Rozdziale 2 odsyła się do książek [6] i [19] podczas gdy definicja grupy reduktywnej (2.4) nie występuje w [6], a w [19] występuje w zadaniach, jest odmienna, choć równoważna. Brakuje odsyłaczy do wielu ważnych własności np. istnienia inwolucji Cartana dla algebry półprostej i jednoznaczności w przypadku zespolonym. Autor zdaje się uważać, że dowolna reduktywna algebra Lie posiada inwolucję Cartana, podczas gdy w [6] jest to wykazane jedynie dla algebr półprostych. Odsyłacze są często zbyt skrótowe, sprowadzają się do wymieniania potrzebnych twierdzeń, bez komentarza (np. podrozdział 6.1).

Chaos redakcyjny. Rozprawie brakuje klarownej koncepcji redakcyjnej. Ze spisu treści wynika, że rozdziały podzielone są na podrozdziały; jest to jednak złudne, bo np. w Rozdziale 2 podstawowe pojęcia dot. algebr Lie zostały zebrane na 3 stronach, bezpośrednio pod tytułem rozdziału, bez wyróżnienia podrozdziału. Kolejne dwa podrozdziały są bardzo różne: podrozdział 2.1 (niecała strona) dotyczący de facto bardzo ogólnych pojęć dot. działań grup na przestrzeniach topologicznych nijak nie pasuje do tematyki Rozdziału 2. Następny 2.2 dot. układów pierwiastkowych jest bezpośrednio związany z tekstem po tytule Rozdziału 2, obejmuje ok. 6 stron i powinien po nim następować. Podrozdział o diagramach Dynkina i diagramach Satake algebr rzeczywistych powinien być wyodrębniony. Kuriozalny redakcyjnie jest Rozdział 3, składający się z jednego podrozdziału na pół strony; nb. byłoby właściwe połączenie tego rozdziału z 2.1, bo oba dotyczą działania grup.

Bardzo niewygodna jest redakcja Rozdziału 7, gdzie podano dowody głównych twierdzeń, zostały sformułowane we Wstępie, nie przytaczając jednak ponownie ich treści .

Podobne do wyżej omówionych przykłady niejasności można mnożyć; około 200 szczegółowych uwag zawarłem jako komentarze w załączonym pliku pdf Rozprawy.

Podsumowując, stwierdzam, że wyniki Rozprawy spełniają wymagania stawiane rozprawom doktorskim, lecz redakcja Rozprawy od strony merytorycznej i formalnej wymaga poprawy. Uważam, że rozprawa powinna być przekazana Autorowi w celu dokonania korekt i oceniona ponownie po złożeniu nowej wersji, w trybie przewidzianym w §6 ust. 6 Rozporządzenia Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z dnia 3 października 2014 r. w sprawie szczegółowego trybu i warunków przeprowadzania czynności w przewodzie doktorskim, w postępowaniu habilitacyjnym oraz w postępowaniu o nadanie tytułu profesora.

S. Jackowski

Stefan Jackowski
profesor nauk matematycznych
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

12 kwietnia 2015 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr. Piotra Jastrzębskiego
"Formy Clifforda-Kleina pewnych przestrzeni jednorodnych"
(II wersja z dnia 16 października 2015 r.)
przedstawionej
Radzie Wydziału Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie

Tematyka rozprawy została obszernie omówiona w recenzji I wersji z dnia 12 kwietnia 2015 r. W podsumowaniu tej recenzji stwierdziłem, że :

> ...wyniki Rozprawy spełniają wymagania stawiane rozprawom doktorskim, lecz redakcja Rozprawy od strony merytorycznej i formalnej wymaga poprawy.

Uwagi ogólne zostały omówione w recenzji, a szczegółowe komentarze dodane do pliku pdf rozprawy. Obecnie ograniczę się więc do omówienia, na ile nowa wersja zawiera oczekiwane uzupełnienia. Już samo porównanie objętości obu wersji: rozprawa ma obecnie 63 strony, w porównaniu do 45 stron I wersji, pokazuje, że autor w istotny sposób rozwinął pewne wątki. Poniżej ocenię najistotniejsze z dokonanych zmian, wskazując też z recenzenckiego obowiązku na pewne drobne usterki.

Streszczenie. Obecna redakcja dużo precyzyjniej i jaśniej przedstawia treść i wyniki rozprawy.

Spis treści. Wprowadzono drobniejszy podział treści na podrozdziały, pozwalający łatwiej zorientować się w treści rozprawy.

1. Wstęp. Redakcja "Wstępu" została znacznie ulepszona; jasno przedstawione są podstawowe pojęcia, niezbędne do zrozumienia głównych wyników.

2. Algebry Liego. W I wersji rozprawy w tym rozdziale pt. "Grupy i algebry Liego" były w sposób mało klarowny pomieszane niezbędne informacje na temat tych obiektów. Obecnie w podrozdziale 2.1 klarownie przedstawiono potrzebne pojęcia i własności oraz zdefiniowano algebry, które występują w głównych wynikach rozprawy. Pewnym zgrzytem w podrozdz. 2.2 jest nieprecyzyjna definicja wektora H_α (Def. 2.34), a także formy Killinga na przestrzeni dualnej j*. W podrozdziale 2.3 została wyjaśniona kwestia odpowiedniości algebr Lie i systemów pierwiastków oraz dodatniości pierwiastków. Jednak na str. 21 wymienia się oznaczenia klasycznych algebr prostych, nie odsyłając do ich definicji podanej na str. 13. Za cenne uzupełnienie uważam wyodrębnienie i uzupełnienie treści w podrozdz. 2.4 i 2.5.

3. Grupy Liego Rozdział 3 został znacznie rozszerzony, z wielką korzyścią dla rozprawy. W prodrozdz. 3.1 omówiono precyzyjnie relację między grupami Lie a algebrami Lie, która ma kluczowe znaczenie dla głównych wyników rozprawy. Do ścisłości definicji w podrozdz. 3.2 można mieć pewne zastrzeżenia: w Def. 3.5 poprawnie zdefiniowano działanie grupy na zbiorze, ale dalej w Def. 3.7 mówi się, że grupa działa na przestrzeni jeśli istnieje ciągłe odwzorowanie, podczas gdy to odwzorowanie jest właśnie działaniem; podobnie w 3.8. Przy definicji kraty nie wprowadzono podgrupy $H \subset G$ oraz nie określono założeń o niej (domkniętość). Są to usterki redakcyjne. W podrozdz. 3.3 należało powiedzieć, że jądrem reprezentacji dołączonej spójnej grupy Lie jest jej centrum. Do definicji orbity działania nie jest potrzebna grupa Ad_G - pojęcie orbity powinno być zdefiniowane w podrozdz. 3.2, gdy była mowa o działaniach grup. Użyteczny jest podrozdz. 3.4 - szkoda, że nie powiązano zdefiniowanych w nim grup Lie z algebrami Lie, zdefiniowanymi w rozdz. 2. W niektórych definicjach brak wyjaśnienia oznaczeń np. J w definicjach grupy $Sp(n, \mathbb{R})$ i następnych. Definicja $SU^*(2n)$ jest niezrozumiała (chyba $n = 1$?). Definicja centrum 3.13 powinna się znaleźć w podrozdz. 3.3. W twierdzeniach 3.18 i 3.19 występuje niewyjaśnione pojęcie "dyfeomorfizmu na siebie" . Przy okazji - podając definicje czasem warto wskazać ich źródło, podobnie jak przy twierdzeniach. Np. definicja reduktywnej grupy Lie, podana za książką Knappa (Def. 3.20), nie jest całkiem standardowa. Szkoda, że skomplikowane definicje nie są poparte przykładami, choćby odwołującymi się do opisanych wcześniej grup i algebr.

W podrozdz. 3.6 brakuje komentarza do sformułowanego twierdzenia Kobayashi 3.29, które ma kluczowe znaczenie dla głównych wyników rozprawy.

4. Rząd a-hiperboliczny W tym rozdziale usunięto szereg drobnych usterek wskazanych w poprzedniej recenzji; dałoby się go jednak napisać jeszcze jaśniej. Należy jednak podkreślić, że wchodzimy tu w zaawansowane rozważania techniczne dot. grup i algebr Lie.

5. $SL(2, \mathbb{R})$-trójki i twierdzenie Jacobsona-Morozova Autor uzupełnił wyjaśnienia dotyczące grupy $SL(2, \mathbb{R})$ i tzw. $SL(2, \mathbb{R})$-trójek - kwestii mających centralne znaczenie dla jego własnych wyników, w szczególności sformułował Tw. 5.3 i podał szkic jego dowodu.

6. Orbity nilpotentne i ich klasyfikacja i 7.Dowody głównych twierdzeń. Dokonano kosmetycznych poprawek, ułatwiających nieco śledzenie coraz bardziej technicznych rozważań.

Podsumowując, stwierdzam ponownie, że wyniki Rozprawy spełniają wymagania stawiane rozprawom doktorskim, a w wersji podlegającej obecnie ocenie redakcja rozprawy jest akceptowalna. Autor wprowadził znakomitą większość poprawek sugerowanych przez recenzenta. Wnoszę o dopuszczenie mgra Piotra Jastrzębskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Stefan Jackowski
profesor nauk matematycznych
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

16 listopada 2015 r.