Recenzja pracy doktorskiej mgr Mariusza Bodziocha
Oblique derivative problem for elliptic second-order equations in a domain with boundary conical point

Praca doktorska mgr Mariusza Bodziocha dotyczy zagadnień eliptycznych w obszarach z niegładkim brzegiem. Są to problemy z reguły pomijane w klasycznych opracowaniach z równań cząstkowych, ale ważne w zastosowaniach. Dość wspomnieć, że seria tragicznych wypadków pierwszego pasażerskiego samolotu odrzutowego Comet prawdopodobnie miała przyczynę w zignorowaniu przez brytyjskich inżynierów faktu, że w rogach montowanych wówczas prostokątnych okienek pojawiają się dodatakowe naprężenia, spowodowane tym, że brzeg okna nie jest krzywą gładką. Od tej pory w samolotach instaluje się okienka z zaokrąglonymi rogami.

W swojej pracy mgr Bodzioch zajmuje się zagadnieniami eliptycznymi ze skośną pchodną na brzegu w wielowymiarowm obszarze z punktem stożkowym, definiowanym jako obszar z brzegiem gładkim za wyjątkiem jednego punktu w pobliżu którego brzeg jest stożkiem obrotowym z wierzchołkiem w tym punkcie. Uzyskane wyniki obejmują zagadnienia liniowe, półliniowe oraz kwaziliniowe. Główne wyniki dotyczą precyzyjnych oszacowań zachowania się silnych rozwiązań takich równań w pobliżu wierzchołka stożka stanowiącego część brzegu obszaru, w zależności od regularności współczynników. Istotną rolę pełnią oszacowania pierwszej wartości własnej dla równania Laplace'a-Beltramiego ze skośną pochodną na powierzchni sferycznej, będącej przecięciem sfery jednostkowej ze stożkiem, definiującym obszar, w którym postawione jest zagadnienie interesujące autora. Problem ten i wynikające z niego nierówności typu Friedrichsa dla obszaru stożkowego rozważane są w Rozdziale 2.

W Rozdziale 3 autor zajmuje się zagadnieniem liniowym. Główne wyniki to oszacowania punktowe rozwiązań w wierzchołku stożka w zależności od funkcji, która szacuje zachowanie się współczynników równania w pobliżu wierzchołka. Asymptotyka rozwiązań zależy od tego, czy funkcja ta jest ciągła w sensie Diniego, czy też nie, oraz od asymptotyki prawej strony problemu w pobliżu wierzchołka w zależności od pierwszej wartości własnej zagadnienia rozważanego w Rozdziale 2. Oszacowania uzyskane są za pomocą długich ciągów oszacowań *a priori*, które wpierw dają oszacowania globalne w przestrzeniach Sobolewa z wagą będą odpowiednią potegą odległości od wierzchołka. Jednym z głównych narzędzi w dowodzie tego twierdzenia, jak i analogicznych twierdzeń w przypadkach pół- i kwaziliniowym, jest wersja nierówności Gronwalla, uzyskana przez promotora pracy i V. Kondratieva. Dalej oszacowania są zawężane do małych otoczeń wierzchołka, gdzie norma w przestrzeni Sobolewa w takim otoczeniu zależna jest od jego wielkości, zaś ostateczne przejście do oszacowań punktowych wykorzystuje zasadę maximum pochodzącą od Gary'ego Liebermana.

Rozdział 4 przenosi wyniki liniowe na przypadek półliniowy w dość standardowy sposób - założenia o nieliniowości pozwalają przerzucić ją na prawą stronę oszacowań i traktować ją tak jak wyrazy niższego rzędu w równaniu liniowym.

Rozdział 5 poświęcony jest zagadnieniu kwaziliniowemu. Tutaj, choć idea dowodu jest podobna, jego przeprowadzenie wymaga dodatkowych operacji.

Mianowicie, autor musi uzyskać pomocnicze punktowe oszacowania rozwiązania i jego gradientu. Dowód tych oszacowań wykorzystuje odpowiednie podrozwiązania zagadnień liniowych. Dalsze oszacowania otrzymane są tak, jak w poprzednich przypadkach, przy odpowiednio wzmocnionych założeniach, choć np. w dowodzie Twierdzenia 5.1 końcowe oszacowania wymagają nietypowych iteracji.

W Dodatku autor zebrał podstawowe twierdzenia wykorzystywane w pracy.

W przedstawionej pracy mgr Bodzioch zajął się ważnym zagadnieniem i wykazał się umiejętnościami technicznymi w zakresie teorii przestrzeni Sobolowa i równań różniczkowych w zakresie wymaganym na poziomie doktorskim. Jest autorem jednej oraz współautorem (wraz z promotorem) 3 prac związanych z tematyką doktoratu, które ukazały się w dobrych czasopismach. Wartość pracy obniża jednak duża ilość błędów redakcyjnych i brak konsekwencji w oznaczeniach. Poniżej podam kilka przykładów, które istotnie utrudniają czytanie pracy.

1. **Definicja obszaru z punktem stożkowym.**

   Czy istotnie założenie, że otoczenie $\mathcal{O}$ jest fragmentem stożka obrotowego nie jest ograniczeniem - dlaczego nie rozważany jest zbiór dyfeomorficzny ze stożkiem? Przedstawiona definicja nie jest naturalna.

   Sama definicja jest nieprecyzyjna. Otwarty stożek nie jest zdefiniowany, przez co trudno się zorientować, o co chodzi w punktach 3, 4 i 5 Definicji 1.1. Z kolei na stronie 22 ustala się liczbę d, która, jak rozumiem, jest promieniem największej kuli w której część stożkowa jest zawarta. Później jednak w prawie każdym twierdzeniu mówi się o istnieniu takiej liczby d dla której zachodzi teza twierdzenia.

   Z tym związane są luki w definicjach i dowodach. Przykładowo, w definicji warunku brzegowego w (L) współczynniki zależą tylko od ω (co samo w sobie jest dość dziwne, np w obszarach niegwiaździstych), ale, co gorsza, w powiązaniu z założeniem (c) na stronie 36 powoduje, że współczynniki te są niezdefiniowane, jeśli G nie jest zawarty w K (patrz Fig. 1.1., jeśli $d = 1$). Związany z tym jest brak zgodności założeń: w założeniu (c) γ i χ są zdefiniowane na $\bar{\Omega}$, podczas gdy w Twierdzeniach 3.1 - 3.3 na całym brzegu G.

   Co gorsza, zgodnie z definicją G_b^a na stronie 21, zbiory $G_{1/2}^{5/2}$ i $\Gamma_{1/2}^{5/2}$ mogą być puste, jeśli G jest zawarty w kuli o promieniu mniejszym niż 1/2 Ten błąd powtarza się we wszystkich dowodach wykorzystujących przeskalowanie zmiennych.

   Podobnie, w wielu oszacowaniach (np (3.4.13)) milcząco zakłada się, że u jest zdefiniowane na Ω.

   Podobnie, np., we wzorze (5.5.20), Γ_0^{2d} nie musi być wewnątrz G.

Mam tutaj wrażenie, że autor niezbyt starannie przepisywał wyniki dla zagadnienia postawionego w całym stożku na przypadek lokalny - chyba brakuje fragmentu rozważań, gdzie zagadnienie w G jest lokalizowane w otoczeniu $\mathcal{O}$ and następnie rozważane w całym stożku.

2. **Istnienie rozwiązań.** Dobrze byłoby w tekście odnieść się do istnienia i jednoznaczności rozwiązań silnych - we Wstępie jest to tylko komentarz bez precyzyjnych założeń.

3. **Oznaczenia.** Autor bardzo swobodnie podchodzi do oznaczeń.

   Dopuszczając czasami wyjątki, należy stosować konwencję, że $u(x)$ to jest wartość funkcji u w punkcie x. Inaczej mamy takie horrory oznaczeniowe jak na przykład we wzorach (3.3.2)-(3.3.3), gdzie w tym samym sformułowaniu mamy $u(x)$ jako warość funkcji, $f(x)$ jako symbol funkcji w normie $\|f(x)\|$ i γ jako symbol funkcji w normie $\|\gamma\|$.

   W Lemacie 3.4 i konsekwentnie dalej pojawiają się symbole u_{xx}, u_x, które nie są zdefiniowane.

   Przy przyjętych założeniach nie ma gwarancji, że $\max \mathcal{A}(|x' - y'|)$, pojawiające się w dowodzie Lematu 3.4, jest liczbąskończoną.

   Co oznacza $k = [\log_2(d/4\epsilon)]$? Część całkowita został zdefiniowana w inny sposób.

   Inną niekonsekwencją jest wymienne używanie 0 i $\mathcal{O}$.

4. **Corollary 3.7, Corollary 4.8**. Ten wniosek jest natychmiastową konsekwencją tego, że u jest ciągła w zerze i zasady lokalnego zachowania znaku.

5. **Theorem 4.12**. Ze sformułowania wynika, że stała c jest niezależna od zbioru G', co oznacza, że może on być dowolnie mały, czyli, przechodząc do granicy, człon z całkowaniem po G' jest niepotrzebny. Jest to zresztą udowodnione w Uwadze 4.13.

6. **Inne zauważone błędy.**

   Powyżej (3.5.15), (3.5.5) nie jest nierównością; podobnie na stronie 69, (4.5.3) nie jest nierównością.

   W podrozdziale 3.6, we wzorach na przeskalowanie zamiast ϵ powinno być ρ.

   W (3.6.1) supremum powinno być po x'.

   Ostatni wzór dowodu Twierdzenia 3.1 zachodzi dla $|x| \in (\rho/2, \rho)$, więc chyba nie można podstawić $|x| = 3\rho/2$.

   Może warto by wyjaśnić, dlaczego załżenia związane z $\mathcal{A}$ są inne w przypadku półliniowym. Wydaje się, że w oszacowaniach $\mathcal{A}$ jest wykorzystywana w podobny sposób, co w przypadku liniowym. Również, czegoś brakuje w warunku na a_0 w (iv).

   W dowodzie Tw. 4.7 - dlaczego można w zagadnieniu nieliniowym przyjąć, że $u(0) \geq 0$.

   Powyżej (4.5.4), chyba nie chodzi o założenie (d).

   W (D) brakuje założeń o g.

Znów wracamy do d - w Twierdzeniu 5.1 istnienie pewnego $d > 0$ jest jedną z tez twierdzenia, po czym poniżej, autor stwierdza...Let G_0^d be a convex rotational cone...

Co to jest $\Gamma_{\pm}^d$ na stronie 83? Poza tym, czy to jest już d z tezy twierdzenia, czy z założeń o G_0^d?

Podobnie w Twierdzeniu 5.4, gdzie dowód zaczyna się od Let.... , $0 < \rho < d$, a istnienie d jest w tezie twierdzenia.

Czy wzór Greena w (5.5.11) jest uzasadniony? Poprzednio chyba był używany w zbiorze z wyciętym wierzchołkiem?

We wzorze (5.5.22), norma powinna chyba być po Γ_0^ρ.

Pomimo wymienionych usterek uważam, że praca spełnia wymagania stawiane pracy doktorskiej. Dobrze było by jednak, aby autor zastanowił się nad poniższymi uwagami.

M Banck Łódź, 2 czerwca 2017