Prof. dr hab. Eligiusz Złotkiewicz

Instytut Matematyki UMCS

Recenzja pracy autorstwa mgr Barbary Uzar,

Klasy funkcji analitycznych generowane przez iloczyny Blaschke'go

przedstawionej jako rozprawa doktorska Radzie Wydzialu Matematyki i Informatyki UniwersytetuWarmińsko-Mazurskiego.

Teoria odwzorowań konforemnych ma swoje korzenie w początkach XX wieku w pracach Koebego, Bieberbacha, Gronwalla, Lőwnera i innych. Została wtedy wyróżniona rodzina S funkcji jednolistnych mających w kole jednostkowym reprezentację postaci

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

i w tej klasie rozwiązane zostały, między innymi, problemy zniekształcenia i pokrycia, a także została sformułowana hipoteza głosząca, że $|a_n| \leq n$, potocznie nazywana problemem współczynników. Próby roztrzygniecia tego zagadnienia, podejmowane przez wielu specjalistów, skutkowały powstaniem rozlicznych metod badawczych i doprowadziły, po ponad 70 latach, do sukcesu. Wtedy też, w pracach Nevanlinny i Study'ego, zostały wyodrębnione podklasy S^c, S^* rodziny S złożone z odwzorowań koła jednostkowego na obszary wypukłe względnie gwiaździste i pojawiła także się nowa problematyka. Póżniej wyróżniono wiele innych podklas klasy S i takie postępowanie jest nadal aktualne , a badania są prowadzone w różnych ośrodkach na całym świecie.

W tym kręgu zagadnień mieści się praca mgr Barbary Uzar.

Swoją rozprawę podzieliła Autorka na 6 rozdziałów.

W dwóch pierwszych zawarte zostały znane wiadomości dotyczące własności funkcji Schwarza, funkcji Caratheodory'go oraz skończonych iloczynów Blaschke'go. Zgromadzone tutaj informacje są wykorzystywane w dalszych rozdziałach pracy.

Wyniki Autorki, a więc nowe rezultaty, zawarte są w rozdziałach 4-6.

Dla ułatwienia narracji ustalmy, że: N - oznacza zbiór liczb naturalnych, $m \in N$, Ω jest skończonym podzbiórem pierścienia $0 < |z| < 1$, (Ω może być także zbiorem pustym), λ jest danym odwzorowaniem, $\lambda : \Omega \to N$.

W rozdziale trzecim najpierw zdefiniowane zostały klasy funkcji określone symbolem $\mathcal{B}(m, \Omega, \lambda)$ związane ze skończonymi iloczynami Blaschke'go oraz klasy $\mathcal{P}(m, \Omega, \lambda)$ związane z funkcjami o dodatniej części rzeczywistej, czyli funkcjami Caratheodory'ego. Ustalone zostały relacje między nimi (Tw. 3.9 i Tw.3.10).

Następnie zostały one wykorzystane do określenia podklas

$$\mathcal{P}'(m, \Omega, \lambda), S^c(m, \Omega, \lambda), S^*(m, \Omega, \lambda)$$

w zawartych w klasach funkcji odp. o ograniczonym obrocie, wypukłych, gwiaździstych. Należace do nich funkcje są jednolistne. Wyróżniona została ponadto klasa $\mathcal{T}(m, \Omega, \lambda)$ zawierająca funkcje analityczne, również niejednolistne, związana z funkcjami Caratheodory'ego. Twierdzenie 3.25 podaje reprentacje funkcji podanych klas w postaci superpozycji funkcji o dodatniej części rzeczywistej i funkcji Schwarza.

W czwartym rozdziale dowodzi się kilku wersji oszacowań od góry funkcjonałów

$|p(z)|, \left|\frac{p'(z)}{p(z)}\right|$ oraz od dołu funkcjonału $\mathcal{R}e(p(z))$, dla $p \in \mathcal{P}(m,\Omega,\lambda)$. Przytoczone uzasadnienia twierdzeń 4.5-4.10 mają standardowy charakter, podczas gdy dowody tw. 4.11 i 4.12 są dłuższe, ciekawsze i wymagają sporej pomysłowości. W tw.4.13 -414 przynoszą dwie wersje twierdzenia o zniekształceniu w klasie $\mathcal{P}(m,\Omega,\lambda)$.

Wykorzystując wyniki otrzymane w rozdziale czwartym, rozważa się w rozdziale piątym zagadnienia wyznaczania promieni gwiaździstości i ograniczoności obrotu w klasie $\mathcal{T}(m,\Omega,\lambda)$ oraz promienia wypukłości w klasie $\mathcal{P}'(m,\Omega,\lambda)$. Znajduje się dolne ograniczenia wymienionych stałych przy czym ograniczenia te są określone jako najmniejsze dodatnie ,względnie jedyne, pierwiastki równań algebraicznych wyższych stopni. Pokazuje się, że przy stosownej redukcji parametrów można stąd otrzymać znane wcześniej wyniki innych autorów.

Rozdział szósty poświęcony jest problemowi współczynników. W tym celu dokonuje autorka pomysłowej modyfikacji definicji klas wprowadzonych trzecim rozdziale i oznacza te rodziny symbolami $\mathcal{P}(m,\Lambda)$, $\mathcal{P}'(m,\Lambda), S^*(m,\Lambda), S^c(m,\Lambda), \mathcal{T}(m,\Lambda)$. Znajduje się najpierw $(Tw.6.5)$ reprezentację funkcji $p(z) \in \mathcal{P}(m,\Lambda)$ w terminach funkcji Schwarza, następnie wzory na współczynniki Taylora c_m i c_{m+1} funkcji $p(z)$, aby po skorzystaniu ze znanych nierówności spełnianych przez początkowe współczynniki funkcji Schwarza otrzymać ograniczenia od góry dla $|c_m|$ i $|c_{m+1}|$, (tw.6.8).

Z uwagi na postać otrzymanych oszacowań nie jest jasne, czy są one lepsze niż klasyczny wynik $|c_n| \leq 2$. Autorka stawia stosowną hipotezę i dowodzi jej słuszności w jednym przypadku.

Twierdzenia 6.12 i 6.13 przynoszą oszacowania współczyników w klasach $\mathcal{P}'(m,\Lambda), S^*(m,\Lambda), S^c(m,\Lambda), \mathcal{T}(m,\Lambda)$ przy upraszczającym założeniu $\Lambda = (\alpha)$.

Pomysł wyróżnienia klas $\mathcal{B}(m,\Omega,\lambda)$ i $\mathcal{P}(m,\Omega,\lambda)$, a w konsekwencji klas $\mathcal{P}'(m,\Omega,\lambda), S^c(m,\Omega,\lambda), S^*(m,\Omega,\lambda)$ jest oryginalny. Podobnego podejścia nie spotkałem w znanej mi literaturze przedmiotu. To jest ważne novum jakie przynosi rozprawa.

Uzasadnienia większości prezentowanych wyników mają dość rutynowy charakter. Jednakże dowody twierdzeń 4.11 i 4.13 , a także niektórych wniosków są pomysłowe.

[Przy okazji pragnę zauważyć, że Autorka poprawnie dowodzi istnienia jedynego rozwiązania równania (5.16) w przedziale $(0,1)$. Jednakże dokonując podstawienia $x = r + r^{-1}$ można to rozwiązanie wyznaczyć efektywnie].

Ciekawe jest również podejście do problemu współczynników, chociaż postawiona tam hipoteza jest uzasadniona jedynie częściowo.

Praca zredagowana jest starannie. Wybór cytowanych wyników innych autorów świadczy o dobrej znajomości literatury przedmiotu.

Godnych wzmianki usterek nie znalazłem.

Wyrażam opinię, że recenzowana praca zawiera elementy nowości naukowej i przynosi interesujace rezultaty. Co więcej, istnieje możliwość dalszego wykorzystania pomysłu wyróżniania innych specjalnych podklas klasy S.

Uważam, że praca spełnia wymogi stawiane rozprawom doktorskim przez odpowiednią Ustawę.

Dlatego wnoszę o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie mgr Barbary Uzar do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Lublin, 22 lipca 2015 roku.

Zbigniew Ustr...