RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ BARBARY UZAR p. t. KLASY FUNKCJI ANALITYCZNYCH GENEROWANYCH PRZEZ ILOCZYNY BLASCHKE'GO

Niech:

H będzie klasą funkcji analitycznych w kole jednostkowym $\boldsymbol{D}:= \{z \in C \text{ , } |z|< 1 \}$,

A podklasą klasy *H* funkcji unormowanych klasycznie tzn. $f(0) = f'(0) - 1 = 0$,

$B: = \{w \in H: |w(z)|< 1, z \in \boldsymbol{D}\}$,

$B_0 : = \{w \in B: w(0) = 0 \}$,

$P: = \{p \in H: p(0) = 1, Re\, p(z) > 0, z \in \boldsymbol{D}\}$.

Klasy *B* , *P* były szeroko badane przez wielu matematyków w szczególności przez Schwarza i Caratheodory'ego. Inspiracją do badań tych klas jest to, że klasy te wykorzystuje się w geometrycznej teorii funkcji analitycznych do badania klas mających interpretację geometryczną, takich jak:

$S: = \{f \in A$: *f* jest różnowartościowa w $\boldsymbol{D}$ (jednolistna w $\boldsymbol{D}$)$\}$,

$S^*: = \{f \in S: f(\boldsymbol{D})$ jest obszarem gwiaździstym względem punktu $0\}$,

$S^c: = \{f \in S: f(\boldsymbol{D})$ jest obszarem wypukłym $\}$.

Klasy: *S*, S^* S^c można badać przy użyciu klasy *P* (a tym samym klasy *B* z uwagi na prosty związek klasy *P* z klasą *B*) i tak dla klasy *S* jest to równanie Lovnera, dla klasy S^* warunek:

$f \in S^* \Leftrightarrow f \in A \text{ , } Re(\frac{zf'(z)}{f(z)}) >0$ dla $z \in D$,a dla klasy S^c warunek $Re(1+\frac{zf''(z)}{f''(z)}) >0$ dla $z \in \boldsymbol{D}$.

Dodatkowe warunki nałożone na funkcje z wyżej wymienionych klas prowadzą do podklas danej klasy.

Tematyka badań polegająca na badaniu różnych podklas danych klas była i jest obszarem badań wielu matematyków w tym również tej rozprawy.

Autorka zetknęła się z problemem zdefiniowania różnych podklas i ich oznaczeniem.

Okazało się, że wprowadzone podklasy wymagają bardzo przemyślanych definicji i oznaczeń.

Fakt ten sprawia, że aby zapoznać się z treścią pracy doktorskiej trzeba zapamiętać wszystkie definicje i oznaczenia których jest bardzo dużo.

We wstępie rozprawy Autorka omawia podstawowe pojęcia i oznaczenia, które wykorzystuje w innych rozdziałach.

Rozdział drugi zawiera definicje klasy Schwarza, czynników Blaschke'go, klasy Carathéodory'ego i podstawowe własności tych klas.

W rozdziale trzecim Autorka podaje definicje klas : *T*, *P'*, S^*, i S^c oraz definicje klas:

$B(m,\Omega, \lambda)$, $P(m,\Omega, \lambda)$ będących odpowiednio podklasami klas *B* i *P*.

Ponadto definiuje klasy: $T(m,\Omega, \lambda)$, $P'(m,\Omega,\lambda)$, $S^*(m,\Omega,\lambda)$ i $S^c(m,\Omega, \lambda)$.

Następnie wykorzystuje czynniki Blaschke'go do scharakteryzowania tych klas.

Rozdział czwarty dotyczy twierdzeń o wzroście i twierdzeń o zniekształceniu oraz oszacowań innych funkcjonałów w rozważanych klasach.

W rozdziale piątym oszacowano z góry promień gwiaździstości w klasie $T(m,\Omega,\lambda)$. Wyznaczono promień gwiaździstości klasy $T(1)$. Ponadto oszacowano z góry promień wypukłości w klasie $P'(m,\Omega,\lambda)$ i $S(m,\Omega,\lambda)$ oraz wyznaczono promień wypukłości w klasie $P'(1)$ i $S^*(1)$.

Podano również oszacowanie z góry promienia ograniczonego obrotu dla kilku rozważanych klas.

Rozdział szósty dotyczy oszacowań wielu funkcjonałów związanych ze współczynnikami funkcji niektórych klas w tym modułów współczynników.

Praca jest ciekawa, przeprowadzone dowody twierdzeń poprawne. Autorka wykazała się dużą sprawnością rachunkową w dowodach niektórych twierdzeń a wprowadzone klasy są pomysłowe i wymagały przemyślanych oznaczeń. Cytowana literatura jest wystarczająca.

Uwagi krytyczne są nieliczne:

W rozdziale 1. str. 7 w definicji $n_f(z_0)$ brak jest założenia , że funkcja f jest różna od funkcji stałej, zaś infimum należało by zastąpić minimum chociaż użycie ~~m~~infimum nie jest błędem.

Definicje na tej stronie związane ze zbiorem $D \subset \boldsymbol{D}$ są zbędne, gdyż nie są wykorzystane w pracy, zatem wystarczy ograniczyć się do koła jednostkowego $\boldsymbol{D}$.

Symbol $n_f(z_0,a)$ jest niejasny, bowiem jaki związek ma ten symbol ze zbiorem D, zaś $n_{f-a}(z_0) = n_f(z_0)$.

Korekta definicji symbolu $n_f(z_0)$ na $n_f(z_0) := \min\{k \in N_0;\ f^{(k)}(z_0) = 0\}$, gdzie $f^{(0)}(z) := f(z)$, dla $f \not\equiv 0$ sprawia, że dla $m = 0$ mamy $f(z_0) \neq 0$, jeśli zaś $m \in N$ to $f(z_0) = 0$ i wtedy symbol $n_{f-a}(z_0)$ ma żądany sens, bowiem dla $k \in N$ i $n_{f-a}(z_0) = k$ mamy $n_f(z_0) = k$ i $f(z_0) = a$, zaś dla $n_f(z_0) = k$ mamy $f(z_0) = 0$.

Przy takiej definicji symbolu $n_f(z_0)$ można zrezygnować z symbolu $n_f(z_0,a)$.

W rozdziale drugim str. 10 w (2.5) wyrażenie $|a| - |b|$ należy zastąpić $||a|-|b||$, tak samo w (2.7) dla $|\alpha|-|z|$ oraz $\varphi(-re^{i\theta})$ zastąpić $|\varphi(-re^{i\theta})|$.

Lewą stronę nierówności (2.8) zastąpić nierównością

$$|\varphi(z)| \geq \begin{cases} 0 \text{ dla } |\varphi(0)|-|z|<0, \\ \dfrac{|\varphi(0)|-|z|}{1-|\varphi(0)|\cdot|z|} \text{ dla } |\varphi(0)|-|z| \geq 0 \end{cases}$$

W rozdziale trzecim w definicji (3.1) symbol $B(m)$ zstąpić symbolem $B_0(m)$.

Na stronie 11 w uwadze (2.15) występuje α_j a powinno być α.

Powyższe uwagi krytyczne nie mają wpływu na moją ocenę końcową rozprawy. Uważam, że przedstawiona rozprawa spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie Pani mgr Barbary Uzar do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Lublin 14 sierpnia 2015 r.

Leopold Koczan

Leopold Koczan